

dr. Andreja Šarlah

# Kvantna mehanika II

gradivo za vaje

## Vsebina

<b>1</b>	<b>Teorija grup</b>	<b>2</b>
1.1	Zvezne grupe . . . . .	2
1.2	Diskretne grupe . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Posebna teorija relativnosti</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Osnove kvantne mehanike</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Kvantna relativistična mehanika</b>	<b>6</b>
4.1	Klein-Gordonova enačba . . . . .	6
4.2	Diracova enačba . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Standardni model</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Vodikov atom</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Sistem <math>N</math> delcev</b>	<b>10</b>
<b>8</b>	<b>Razno</b>	<b>11</b>
<b>A</b>	<b>Domače naloge</b>	<b>12</b>
A.1	Študijsko leto 2006/07 . . . . .	12
A.2	Študijsko leto 2007/08 . . . . .	19
A.3	Študijsko leto 2008/09 . . . . .	24
A.4	Študijsko leto 2009/10 . . . . .	28
<b>B</b>	<b>Kolokviji in izpiti</b>	<b>35</b>
B.1	Študijsko leto 2006/07 . . . . .	35
B.2	Študijsko leto 2007/08 . . . . .	41
B.3	Študijsko leto 2008/09 . . . . .	42
B.4	Študijsko leto 2009/10 . . . . .	46
<b>C</b>	<b>Literatura</b>	<b>49</b>

# 1 Teorija grup

## 1.1 Zvezne grupe

1. Ponovite pojme kot so grupa, algebra, generatorji grupe, zvezne in diskretne simetrije, zvezne in diskretne grupe!
2. Kaj je Liejeva algebra?
3. Grupa  $SO(3)$ :
  - (a) elementi grupe  
Kaj pomeni? Koliko elementov ima grupa  $SO(3)$ ? Zapišite jih? Kaj so to Liejeve grupe?
  - (b) algebra generatorjev grupe  
Koliko generatorjev ima grupa  $SO(3)$ ? Zapišite generatorje grupe! Zapišite komutatorske relacije med njimi (definirajte algebro, ki jo zaprejo)!
  - (c) lastnosti grupe  
Določite rank grupe! Določite Casimirjeve operatorje grupe!
  - (d) lastnosti kvantnomehanskih sistemov, invariantnih na grupo  
Koliko "dobrih kvantnih števil" ima sistem, invarianten na grupo  $SO(3)$ ? Katere vrednosti lahko zavzamejo ta kvantna števila? Zakaj? Zapišite operatorja nižanja in dvigovanja! Kaj naredita na lastnem stanju, določenim s prej omenjenimi dobrimi kvantnimi števili?
4. Zapišite matrično upodobitev algebre  $SO(3)$  za  $l = 1/2, 1, 3/2$ !
5. S produkti matrik  $\gamma^a$  in  $4 \times 4$  matriko identitete (I) dobimo 16 matrik  $\Gamma^A$ , ki tvorijo Cliffordovo algebro;  $\Gamma^A = I; \gamma^0; i\gamma^k; i\gamma^k\gamma^{l \neq k}; \gamma^k\gamma^0; \gamma^1\gamma^2\gamma^3; i\gamma^k\gamma^{l \neq k}\gamma^0; i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0$ , kjer je  $k, l = 1, 2, 3$ . Za matrike  $\gamma^a$  velja antikomutatorska relacija  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} I$ .
  - (a) Pokažite, da velja  $(\Gamma^A)^2 = I$ !
  - (b) Če vemo, da za  $\forall \Gamma^A \neq I$  obstaja  $\Gamma^B$ , tako da velja  $\Gamma^B\Gamma^A\Gamma^B = -\Gamma^A$ , pokažite, da so matrike  $\Gamma^A \neq I$  brezsledne!
6. Grupa  $U(1)$ : ponovite njene lastnosti, določite elemente, generatorje,...
7. Grupe  $SU(n)$ :
  - (a) Koliko generatorjev imajo?
  - (b) Koliko Casimirjevih operatorjev imajo?
  - (c) Kakšne so njihove lastnosti?
  - (d) Kakšen fizikalni pomen imajo?
8. Izračunajte matrike adjungirane upodobitve za algebro generatorjev grupe  $SU(2)$  [izomorfna algebr  $SO(3)$ !]! Poiščite transformacijo, ki diagonalizira  $T^3$  in zapišite matrike  $T^a$  v novi bazi!  
*Namig:*  $\{x^a, x^b\}_- = if^{abc}x^c$  in  $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ , kjer so  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$

9. Pokažite, da je

$$U(\vec{\alpha}) = \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) = I \cos \alpha - \frac{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{\alpha} \sin \alpha,$$

kjer je  $\alpha = |\vec{\alpha}|$ ,  $I$  matrika identitete. Upoštevajte tudi zvezo  $(\vec{a} \cdot \vec{\tau})(\vec{b} \cdot \vec{\tau}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\tau}$ .

10. Grupa  $SO(1,3)$  je direktni produkt dveh  $SU(2)$  grup,  $SO(1,3) = SU(2) \otimes SU(2)$ . Z generatorji grupe  $SO(1,3)$ ,  $M^{ab}$ , s katerimi lahko definiramo še  $M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}$ , zapišemo operatorje  $N_{\pm}^i = \frac{1}{2}(M^i \pm iM^{0i})$ .
- Pokažite, da operatorji  $N_+^i$  in  $N_-^i$  zaprejo vsak svojo podalgebro!
  - Pokažite, da sta operatorja  $N_{\pm} = \sum_i (N_{\pm}^i)^2$  Casimirjeva operatorja vsak svoje podgrupe!
  - Izračunajte, kako se Casimirjeva operatorja grupe  $SO(1,3)$ ,  $M = \frac{1}{2}M^{ab}M_{ab}$  in  $\Gamma^{(1+3)} = \frac{4i}{3}M^{0i}M^i$  zapišeta s Casimirjevima operatorjema podgrup  $SU(2)$ !
  - V bazi  $|n_+m_+\rangle|n_-m_-\rangle$ , kjer je  $N_{\pm}|n_{\pm}m_{\pm}\rangle = n_{\pm}|n_{\pm}m_{\pm}\rangle$  in  $N_{\pm}^3|n_{\pm}m_{\pm}\rangle = m_{\pm}|n_{\pm}m_{\pm}\rangle$ , zapišite matrično upodobitev operatorjev  $N_{\pm}$ ,  $N_{\pm}^3$  in  $M^i$ ,  $M^{0i}$ ,  $M$ ,  $\Gamma^{(1+3)}$ !
11. Zapišite matrično upodobitev generatorjev grupe  $SO(1,3)$  v bazi  $|n_+m_+\rangle|n_-m_-\rangle$ , kjer je  $n_+ = 0$  in  $n_- = 1/2$  ter  $n_+ = 1/2$  in  $n_- = 0$ ! Primerjajte z operatorji za spin fermionov delcev/antidelcev!
12. Proton in nevtron predstavljata izobarni dublet.
- Skonstruirajte matrično upodobitev operatorjev, ki transformirajo proton v nevtron in obratno!
  - Kakšne so lastnosti teh operatorjev? Koliko jih je? Preverite, katero algebro zaprejo!
  - Zapišite elemente grupe, ki jo generirajo ti generatorji! Katera grupa je to?
  - Kako se pod vplivom teh elementov transformira izo-spinor?
13. Na proton/nevtron delujemo z operatorjem  $U(\vec{\alpha})$  grupe  $SU(2)$ .
- Kolikšen je delež protona in kolikšen nevtrona v novi valovni funkciji?
  - Preverite, da sta tudi stanja  $U|p\rangle$  in  $U|n\rangle$  ortogonalni!
14. Obravnavajte stanja devterona, kot sistema dveh identičnih delcev z različno komponento izospina!
- Zapišite operator izospina za sistem več delcev!
  - Zapišite možne valovne funkcije za devteron!

- (c) Obravnavajte različna možna stanja devterona v smislu energije teh stanj!
15. Generatorji grupe  $\mathcal{G}$  tvorijo algebro  $\mathcal{A}$ , ki jo določajo komutatorske relacije  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ .
- (a) Pokažite, da so matrike  $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ , upodobitev algebre  $\mathcal{A}$ !  
*Namig: Pomagajte si z Jacobijevo (trikotniško) identiteto.*
- (b) Naj bo  $U$  unitarna matrika za prehod v novo bazo,  $T'^i = UT^iU^\dagger$ . Pokažite, da so tudi matrike  $T'^i$  upodobitev algebre  $\mathcal{A}$ !
- (c) Pokažite, da je  $\{x^i, x^j\}_- = 0$  potreben pogoj za to, da lahko matriki  $T^i$  in  $T^j$  hkrati diagonaliziramo! *Dodatno vprašanje: Ali je pogoj tudi zadosten?*
16. Liejeva grupa  $\mathcal{G}$  ima 8 generatorjev  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , ki zaprejo algebro s sledečimi komutatorskimi relacijami,  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ . Neničelne vrednosti strukturnih konstant  $f^{ijk}$  so

$ijk$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f^{ijk}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

- (a) Določite rank grupe  $\mathcal{G}$ ! Kakšen je njegov fizikalni pomen?  
*Namig: Rank grupe je definiran kot največje število generatorjev, ki komutirajo med seboj.*
- (b) Kako se transformirajo strukturne konstante  $f^{ijk}$  ob transformaciji generatorjev  $x^i = T^{ij}x^j$ ?

## 1.2 Diskretne grupe

- Grupa  $S_N$ .
  - Koliko elementov ima? Kaj so elementi te grupe? Kakšen je njen fizikalni pomen?
  - Poiščite operator, ki simetrizira, in operator, ki antisimetrizira osnovno stanje v indeksih  $i, j$ !
  - Poiščite operatorja, ki iz osnovnega stanja naredita bodisi popolnoma simetrično ali popolnoma antisimetrično stanje!
- Koliko elementov ima grupa  $S_3$ ? Zapišite jih! Ali je izbira enolična? Določite popolnoma simetričen in popolnoma antisimetričen operator in izpišite stanji, ki jih naredita na osnovnem stanju!
- Poiščite vse standardne oblike Youngovih tablojev za grupo  $S_3$ ! Določite število posameznih podprostorov in njihovo dimenzijo!
- Poiščite vse standardne oblike Youngovih tablojev za grupo  $S_4$ ! Določite število posameznih podprostorov in njihovo dimenzijo!

## 2 Posebna teorija relativnosti

1. Določite matriko Lorentzove transformacije!
2. Kako se pri Lorentzovi transformaciji transformirajo odvodi?
3. Pokažite, da dajo spodaj zapisane Lagrangeove funkcije enake enačbe gibanja za prost delec!

$$(a) L = -mc\sqrt{\bar{x}^a \bar{x}_a}$$

$$(b) L = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta} \bar{x}^a \bar{x}_a + \eta m^2 c^2 \right)$$

4. Iz Lagrangeove funkcije za prosto elektromagnetno polje zapišite Maxwellove enačbe in enačbo umeritvene invariance!
5. Za sistem vektorskega polja  $A^a$ , ki je sklopljeno z naboji in tokovi, ki jih povzroča sistem delcev, katerih svetovnice opisujejo vektorji  $x_\alpha^a$  zapišite
  - (a) Lagrangeovo funkcijo
  - (b) Euler-Lagrangeove enačbe gibanja
  - (c) Hamilton-Jacobijeve enačbe gibanja

## 3 Osnove kvantne mehanike

1. Pokažite, da so lastne vrednosti hermitskega operatorja realne!
2. Pokažite, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, ortogonalni!
3. Pokažite, da sta  $\hat{x}$  in  $\hat{p}$  hermitska operatorja!
4. Harmonski oscilator: kreacijski in anihilacijski operator ter zapis Hamiltonske z njima; lastna stanja harmonskega oscilatorja – energije in valovne funkcije, valovne funkcije v koordinatni reprezentaciji.
5. Koherentna stanja harmonskega oscilatorja: poiščite lastna stanja anihilacijskega operatorja! Kakšen je njihov časovni razvoj? Kakšen je fizikalni pomen koherentnih stanj?
6. V matrični obliki zapišite operatorje

$$(a) \hat{a}, \hat{a}^+,$$

$$(b) \hat{b}, \hat{b}^+,$$

$$(c) \hat{a}^+ \hat{a}, \hat{a}^2, (\hat{a}^+)^2,$$

$$(d) \hat{b}^+ \hat{b}, \hat{b}^2, (\hat{b}^+)^2.$$

Baza za bozonske operatorje so  $|n\rangle$ , kjer  $n = 0, 1, 2, \dots$ , za fermionske pa  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ .

7. Sistem bozonov in fermionov naj opiše Hamiltonka  $\mathcal{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + b^\dagger b) := \hbar\omega\hat{N}$ , kjer sta  $a, a^\dagger$  bozonska in  $b, b^\dagger$  fermionska anihilacijski in kreacijski operator.
  - (a) Poiščite lastna stanja te Hamiltonke!
  - (b) Preprost model supersimetričnih transformacij opiše supersimetrični operator,  $\hat{Q} = a^\dagger b + b^\dagger a$ . Kakšen je njegov pomen? Določite njegove komutacijske lastnosti z  $a, a^\dagger$  in  $b, b^\dagger$ ! Kaj naredi supersimetričen operator na lastnem stanju sistema?
  - (c) Zapišite operatorja  $\hat{N}$  in  $\hat{Q}$  v matrični obliki!
8. Nerelativistični opis vodikovega atoma. Zapišite Hamiltonko v krogelnih koordinatah! Katere so konstante gibanja/dobra kvantna števila? Poiščite lastne energije, lastne funkcije (kotni in radialni del)!
9. Brez uporabe tabel Clebsch-Gordonovih koeficientov poiščite valovno funkcijo za  $j = 1/2$ , kjer je  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  in sta velikosti tirne in spinske vrtilne količine  $l = 1$  in  $s = 1/2$ ! Preverite rezultat z uporabo tabel Clebsch-Gordonovih koeficientov!
10. Brez uporabe tabel Clebsch-Gordonovih koeficientov poiščite valovno funkcijo za  $j = 3/2$ , kjer je  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  in sta velikosti tirne in spinske vrtilne količine  $l = 1$  in  $s = 1/2$ ! Preverite rezultat z uporabo tabel Clebsch-Gordonovih koeficientov!

## 4 Kvantna relativistična mehanika

### 4.1 Klein-Gordonova enačba

1. Zapišite Klein-Gordonovo enačbo! Kateri klasični vezi ustreza?
2. Zapišite Klein-Gordonovo enačbo v koordinatni reprezentaciji! Kakšna enačba je to matematično in kakšna fizikalno?
3. Poiščite rešitve Klein-Gordonove enačbe za proste delce!
4. Določite tok za Klein-Gordonovo enačbo!
5. Poiščite nerelativistično limito Klein-Gordonove enačbe in ocenite velikost  $\partial\varphi/\partial t$  napram  $\varphi$ !

$$(\hat{p}^a \hat{p}_a - m_0^2 c^2)\psi = 0$$

*Namig: v nerelativistični limiti se energija delca le malo razlikuje od njegove mirovne energije,  $E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$ , zato lahko valovno funkcijo zapišemo v obliki*

$$\psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) \exp(-im_0 c^2 t/\hbar).$$

6. Ob primerni izbiri nastavka za valovno funkcijo, to je  $\psi = \varphi + \chi$  in  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = mc^2(\varphi - \chi)$ , lahko Klein-Gordonovo enačbo za prost delec zapišemo s sistemom dveh sklopljenih diferencialnih enačb, ki sta prvega reda v odvodih po času. V matrični obliki ju zapišemo kot “Schrödingerjevo” enačbo, to je  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$ , kjer je

$$\hat{H} = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{\tau}_3 mc^2.$$

$\hat{\tau}_i$  so  $2 \times 2$  matrike identične Paulijevim matrikam – zanje velja  $\{\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_j\} = 2 \delta_{ij} I$ , valovna funkcija  $\Psi$  pa je vektor,  $\Psi^\top = (\varphi, \chi)$ .

- Pokažite, da  $\Psi$ , ki je rešitev “Schrödingerjeve” enačbe, zadošča tudi Klein-Gordonovi enačbi!
  - Določite vektor četverec toka v “Schrödingerjevi” reprezentaciji!  
*Namig: “Schrödingerjevo” enačbo pomnožite še z matriko  $\hat{\tau}_3$ .*
  - Poiščite rešitev za prost delec!
  - Komentirajte rešitev v nerelativistični limiti!
7. V okviru Klein-Gordonove enačbe opišite sipanje delca na potencialnem skoku višine  $V_0$ ! Obravnavajte različne primere glede na predznak in višino skoka!

## 4.2 Diracova enačba

1. Splošen nastavek za kvantnomehansko enačbo za relativističen delec, ki naj bo linearna v časovnih odvodih, podaja

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ \frac{\hbar c}{i} \left( \alpha^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta mc^2 \right] \psi \equiv H_f \psi.$$

Zapišite (izračunajte) pogoje, ki jim morajo zadoščati  $\alpha^i, \beta$ , da bo veljala (i) vez  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ , (ii) kontinuitetna enačba za  $\rho = \psi^\dagger \psi$  in (iii) bo enačba Lorentzovo invariantna!

- Zapišite matrike  $\gamma^a$  v Diracovi in kiralni reprezentaciji! Določite transformacijo, ki prevede iz ene v drugo reprezentacijo! V eni in drugi reprezentaciji zapišite operatorje  $S^i, S^{0i}$  in  $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$ !
- Določite/preverite antikomutatorske zveze za matrike  $\gamma^a$ !
- Določite konstante gibanja/dobra kvantna števila za prost Diracov delec!  
*Namig: Izračunajte komutatorja  $\{p_a, H_f\}_-, \{\vec{S} \cdot \vec{p}, H_f\}_-$ ! Kaj sta operatorja ročnosti in sučnosti?*
- Izračunajte vektor četverec toka za Diracovo enačbo za prost delec!
- Določite lastna stanja Diracove enačbe v Diracovi upodobitvi!

7. V kiralni reprezentaciji določite lastna stanja Diracove enačbe za prost delec!
8. Kako se s časom spreminja lega Diracovega delca? (Pojav je znan pod imenom "Zitterbewegung".)
9. V curku hitrih elektronov je pričakovana vrednost komponente spina v smeri gibanja  $1/4$ . V Diracovi upodobitvi zapišite valovno funkcijo za "povprečni" elektron iz tega curka!
10. Obravnavajte sipanje Diracovega delca na potencialnem skoku višine  $V_0$ ! Kako je z zveznostjo valovne funkcije in njenih odvodov na skoku? Določite, kolikšen delež vpadnih delcev se na skoku odbije! Kolikšen del pa je prepuščen? Pri katerih pogojih pride do popolnega odboja?
11. Obravnavajte Diracov delec na enodimenzionalni končni potencialni jami širine  $a$  in globine  $V_0$ !
  - (a) Določite splošno obliko valovne funkcije ter pripadajoči energijo in gibalno količino.
  - (b) Podrobneje obravnavajte vezana stanja! (Poiščite pogoje zanje, določite energije vezanih stanj,...)
12. Curek Diracovih delcev z energijo  $E$  naleti na potencialni skok, ki se skalarno sklaplja z delci (sklopitev z masnim členom!). Višina potencialnega skoka je  $V_0$ .
  - (a) Zapišite Diracovo enačbo za posamezen delec!
  - (b) Zapišite valovno funkcijo in pripadajoče parametre na obeh straneh skoka!
  - (c) Kolikšen del vpadnega curka delcev se na potencialnem skoku odbije in kolikšen del je prepuščen? Pri katerih pogojih pride do popolnega odboja?
13. Obravnavajte Diracov delec na enodimenzionalni končni potencialni jami globine  $V_0$  s skalarno sklopitvijo! Širina jame je  $a$ .
  - (a) Določite splošno obliko valovne funkcije ter pripadajoči energijo in gibalno količino.
  - (b) Podrobneje obravnavajte vezana stanja! (Poiščite pogoje zanje, določite energije vezanih stanj,...)
14. Določite energijska stanja elektrona v homogenem magnetnem polju!
  - (a) Izpišite ustrezno Diracovo enačbo!
  - (b) Zapišite nastavek za valovno funkcijo! Katera so dobra kvantna števila?
  - (c) Kolikšen je razmik med sosednjimi stanji?



## 5 Standardni model

1. Katere prostostne stopnje pripišemo delcem v okviru standardnega modela? katerim simetrijskim grupam ustrezajo?
2. Zapišite akcijo v okviru standardnega modela! kateri so postulati standardnega modela?
3. Poskusi kažejo, da se elektromagnetno in izospinsko vektorsko polje manifestirata v določeni linearni kombinaciji, to je  $Q = \tau^{13} + Y$ . Določite parametre v nastavku  $A_a^Y = -\sin \vartheta Z_a + \cos \vartheta A_a$  in  $A_a^{13} = \cos \vartheta Z_a + \sin \vartheta A_a$ , da bo standardni model v skladu z opažanji!
4. Kakšne oblike je člen, ki opisuje samointerakcijo skalarnih bozonov? Obravnavajte različne možnosti oblike tega potenciala, pogoje, pri katerih ta nastopi, in njihov fizikalni pomen!
5. Iz sklopitve skalarnih polj z delci (fermioni in vektorskimi bozoni) določite, kolikšno maso dobijo ob zlomu simetrije skalarnih bozonov vektorski bozoni!
6. V standardnem modelu dobijo fermioni maso preko sklopitve levo in desno ročnih delcev različnih družin.
  - (a) Zapišite gostoto Lagrangeove funkcije, ki ustreza Yukawini sklopitvi!
  - (b) Premislite, kako je z možnostjo diagonalizacije splošne kompleksne matrike!
  - (c) Prepišite fermionski del gostote Lagrangeove funkcije tako, da bodo v njej nastopale "oblečene" fermionske valovne funkcije!
7. Zapišite del gostote Lagrangeove funkcije, ki ustreza sklopitvi fermionov z vektorskimi bozoni, v obliko interakcije tokov s polji!
8. S pomočjo tabele kvantnih števil osnovnih delcev zapišite nevtralne elektrošibke tokove!
9. S pomočjo tabele kvantnih števil osnovnih delcev zapišite nabite elektrošibke tokove!
10. S pomočjo tabele kvantnih števil osnovnih delcev zapišite barvne tokove!

## 6 Vodikov atom

1. Obravnavajte vodikov atom v okviru Klein-Gordonove enačbe, to je relativistično, a brez upoštevanja spina! Primerjajte rezultate z rezultati v okviru nerelativističnega opisa!
2. Relativistični vodikov atom. Zapišite Diracovo enačbo za relativistični elektron v potencialu točkastega jedra! Poiščite dobra kvantna števila! Kako je s parnostjo bispinorja? Zapišite Hamiltonko v krogelnih koordinatah!

3. Lastna stanja elektrona v Coulombskem potencialu jedra z nabojem  $Ze_0$  podaja zveza

$$E_N = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{[N - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}]^2} \right\}^{-1/2},$$

kjer je  $\alpha$  konstanta fine strukture,  $j$  velikost skupne vrtilne količine in  $N$  glavno kvantno število.

- Katere vrednosti lahko zavzame  $N$ ?
  - Katere vrednosti lahko zavzame  $j$ ? Kolikšna je največja vrednost pri danem  $N$ ?
  - Kakšna je odvisnost  $E_N$  od  $N$  in  $j$  za atome lahkih jeder?
  - Kolikšna je vezavna energija,  $E_{vez}$ , elektrona v stanju  $N, j$  za atome lahkih jeder?
  - Izračunajte  $E_{vez}$  za prvih 10 stanj elektrona (zapišite oznake elektronskih konfiguracij) v atomu vodika!
  - Kje so meje veljavnosti zgoraj zapisane  $E_N$ ? Zakaj?
4. Stanje vodikovega atoma označimo z elektronsko konfiguracijo oblike  $Nl_j$ , kjer je  $N$  glavno kvantno število,  $l$  velikost tirne vrtilne količine (uporabljamo črkovne oznake, to je  $s \leftrightarrow 0$ ,  $p \leftrightarrow 1$ ,  $d \leftrightarrow 2$ , ...) in  $j$  skupna vrtilna količina.
- Izračunajte, kolikšna je vezavna energija elektrona v vodikovem atomu v stanju  $2s_{1/2}$ ,  $2p_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$ ,  $2p_{5/2}$  in  $2d_{5/2}$ ! Za koliko se te energije razlikujejo od tistih, izračunanih v nerelativističnem približku?
  - Zapišite kotni del delčne Diracove valovne funkcije za elektronsko stanje  $2p_{3/2}$ !
5. Primerjajte opisa vodikovega atoma v okviru relativističnega opisa, če upoštevamo spin oziroma ga ne! V približku za lahka jedra, izračunajte razliko med energijo stanj v okviru opisa z Diracovo ali Klein-Gordonovo enačbo! Pokažite, da razlika ustreza členu, ki v nerelativistični kvantni mehaniki opiše sklopitev spin-tir!

## 7 Sistem $N$ delcev

- Imejmo tri neločljive delce, ki se lahko nahajajo v treh različnih enodelčnih stanjih,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  in  $|3\rangle$ . Vsako stanje lahko zaseda le po en delec.
  - Zapišite vsa možna produktna stanja za ta trodelčni sistem!
  - Naj pod prejšnjo točko zapisana stanja določajo bazo. Kako se v njej zapišejo elementi permutacijske grupe  $S_3$ ?
  - Zapišite popolnoma simetrično valovno funkcijo za sistem!

- (d) Zapišite popolnoma antisimetrično valovno funkcijo za sistem!
  - (e) Poiščite bazo preostalima nerazcepnima upodobitvama (z mešano simetrijo)!
  - (f) Zapišite matrično upodobitev grupe  $S_3$  v bazi v prejšnjih točkah izračunanih nerrazcepnih upodobitev!
2. Zapišite valovno funkcijo protona s produktnimi valovnimi funkcijami konstitutivnih kvarkov!

## 8 Razno

1. Aplicirajte Bohrov model na problem gibanja planetov, to je na gravitacijski potencial, in izpeljite Planckove količine (Planckove polmer, čas, maso, energijo, itd.)! Kakšen je njihov pomen? *Predpostavki: Masi planetov sta enaki, njuna vezavna energija pa znaša  $-mc^2$ .*
2. S pomočjo Newtonove mehanike izpeljite enačbo standardnega modela vesolja! Obravnavajte različne scenarije!
3. Ponovite pojme kot so evklidski prostor, evklidska metrika, vektorski prostor,...
4. Obravnavajte prehod med dvema ortogonalnima koordinatnima sistemoma!
5. Obravnavajte prehod v neortogonalni koordinatni sistem!
  - (a) Zapišite ustrezno prehodno matriko in izračunajte Jacobijevo determinanto!
  - (b) Zapišite direktno in recipročno bazo!
  - (c) Kaj je metrični tenzor? Zapišite ga za dani primer!
  - (d) Zgledi:
    - i. Preprosta kubična mreža.
    - ii. Prostorsko centrirana mreža.
    - iii. 2D "rombski" sistem.
6. Opis delca in antidelca v Diracovi in Feynmanovi sliki!
7. Feynmanovi diagrami: zelo zelo kratek uvod.
8. Iz razlike v elektrostatski energiji protona in nevtrona ocenite razliko mas obeh delcev! Delca obravnavajte kot enakomerno nabiti krogi.
9. Teorija Clebsch-Gordonovih koeficientov.

## A Domače naloge

### A.1 Študijsko leto 2006/07

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

1. domača naloga

7. 11. 2006

### Ponovitev posebne teorije relativnosti – sklopitev vektorskega polja z naboji in tokovi

Za sistem vektorskega polja  $A^a$ , ki je sklopljeno z naboji in tokovi, ki jih povzroča sistem delcev, katerih svetovnice opisujejo vektorji  $x_\alpha^a$  zapišite

- a) Lagrangeovo funkcijo
- b) Euler-Lagrangeove enačbe gibanja
- c) Hamilton-Jacobijeve enačbe gibanja

Rešeno nalogo oddajte na vajah 14. 11. 2006!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

2. domača naloga

28. 11. 2006

### Bozonski in fermionski anihilacijski in kreacijski operatorji — matrični zapis

V matrični obliki zapišite operatorje

a)  $\hat{a}, \hat{a}^+$ ,

b)  $\hat{b}, \hat{b}^+$ ,

c)  $\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}^2, (\hat{a}^+)^2$ ,

d)  $\hat{b}^+\hat{b}, \hat{b}^2, (\hat{b}^+)^2$ .

Baza za bozonske operatorje so  $|n\rangle$ , kjer  $n = 0, 1, 2, \dots$ , za fermionske pa  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ .

Rešeno nalogo oddajte na vajah 5. 12. 2006!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

3. domača naloga

12. 12. 2006

### Relativistična kvantna mehanika – Klein-Gordonova enačba I.

- a) Poiščite nerelativistično limito Klein-Gordonove enačbe!

$$(\hat{p}^a \hat{p}_a - m_0^2 c^2) \psi = 0$$

*Namig: v nerelativistični limiti se energija delca le malo razlikuje od njegove mirovne energije,  $E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$ , zato lahko valovno funkcijo zapišemo v obliki*

$$\psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) \exp(-im_0 c^2 t / \hbar).$$

- b) Ocenite velikost  $\partial\varphi/\partial t$  napram  $\varphi$ .

Rešeno nalogo oddajte na vajah 19. 12. 2006!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

4. domača naloga

9. 1. 2007

### Relativistična kvantna mehanika – Diracova enačba I.

*V kiralni reprezentaciji določite lastna stanja Diracove enačbe za prost delec!*

Pomoč:

- Diracova enačba:  $(\hat{\gamma}^a \hat{p}_a - m_0 c)|\psi\rangle = 0$
- nastavek za valovno funkcijo:  
 $|\psi\rangle = \alpha|\psi_{L\uparrow}\rangle + \beta|\psi_{L\downarrow}\rangle + \gamma|\psi_{D\uparrow}\rangle + \delta|\psi_{D\downarrow}\rangle$
- $\gamma_c^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_c^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$

Rešeno nalogo oddajte na vajah 16. 1. 2007!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

5. domača naloga

20. 2. 2007

### Relativistična kvantna mehanika – Diracova enačba II.

Obravnavajte Diracov delec na enodimenzionalni končni potencialni jami širine  $a$  in globine  $V_0$ !

1. Določite splošno obliko valovne funkcije ter pripadajoči energijo in gibalno količino.
2. Podrobneje obravnavajte vezana stanja! (Poiščite pogoje zanje, določite energije vezanih stanj,...)

Rešeno nalogo oddajte na vajah 27. 2. 2007!



dr. Andreja Šarlah  
 Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
 FMF, UL

## Kvantna mehanika II

6. domača naloga

20. 3. 2007

### Teorija grup – SU(n)

1. Izračunajte matrike adjungirane upodobitve za algebro generatorjev grupe SU(2) [izomorfna algebri SO(3)]! Poiščite transformacijo, ki diagonalizira  $T^3$  in zapišite matrike  $T^a$  v novi bazi!

*Namig:*  $\{x^a, x^b\}_- = if^{abc}x^c$  in  $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ , kjer so  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$

2. Pokažite, da je

$$U(\vec{\alpha}) = \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) = I \cos \alpha - \frac{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{\alpha} \sin \alpha,$$

kjer je  $\alpha = |\vec{\alpha}|$ ,  $I$  matrika identitete. Upoštevajte tudi zvezo  $(\vec{a} \cdot \vec{\tau})(\vec{b} \cdot \vec{\tau}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\tau}$ .

Rešeno nalogo oddajte na vajah 27. 3. 2007!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2006/07  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

7. domača naloga

15. 5. 2007

### Vodikov atom

Lastna stanja elektrona v Coulombskem potencialu jedra z nabojem  $Ze_0$  podaja zveza

$$E_N = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{[N - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}]^2} \right\}^{-1/2},$$

kjer je  $\alpha$  konstanta fine strukture,  $j$  velikost skupne vrtilne količine in  $N$  glavno kvantno število.

- Katere vrednosti lahko zavzame  $N$ ?
- Katere vrednosti lahko zavzame  $j$ ? Kolikšna je največja vrednost pri danem  $N$ ?
- Kakšna je odvisnost  $E_N$  od  $N$  in  $j$  za atome lahkih jeder?
- Kolikšna je vezavna energija,  $E_{vez}$ , elektrona v stanju  $N, j$  za atome lahkih jeder?
- Izračunajte  $E_{vez}$  za prvih 10 stanj elektrona (zapišite oznake elektronskih konfiguracij) v atomu vodika!
- Kje so meje veljavnosti zgoraj zapisane  $E_N$ ? Zakaj?

Rešeno nalogo oddajte na vajah 22. 5. 2007!

## A.2 Študijsko leto 2007/08

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2007/08  
FMF, UL

### Kvantna mehanika II

1. domača naloga

2. 10. 2007

#### Od atomov do vesolja

Rešite vsaj eno od sledečih nalog!

1. Aplicirajte Bohrov model na problem gibanja planetov, to je na gravitacijski potencial, in izpeljite Planckove količine (Planckove polmer, čas, maso, energijo, itd.)! Kakšen je njihov pomen?
2. S pomočjo Newtonove mehanike izpeljite enačbo standardnega modela vesolja! Obravnavajte različne scenarije!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 9. 10. 2007!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2007/08  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

2. domača naloga

6. 11. 2007

### Lagrangeova funkcija

1. Pokažite, kako se pri prehodu med inercialnimi sistemi, kjer velja  $x'^a = \Lambda^a_b x^b$ , transformirajo odvodi  $\partial/\partial x^a \rightarrow \partial/\partial x'^a$  in  $\partial/\partial x_a \rightarrow \partial/\partial x'_a$ !
2. Pokažite, da dasta spodnja nastavka za Lagrangeovo funkcijo ustrezne enačbe gibanja za prost delec! Poiščite nerelativistično limito!

a)  $L = -mc\sqrt{\bar{x}^a \bar{x}_a}$

b)  $L = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta} \bar{x}^a \bar{x}_a + \eta m^2 c^2 \right)$

Za Lagrangeovo funkcijo pod točko a) izračunajte impulz ter zapišite Hamiltonko in ustrezne Hamilton-Jacobijeve enačbe!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 13. 11. 2007!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2007/08  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

3. domača naloga

27. 11. 2007

### Lagrangeova funkcija II

Sistem vektorskega polja  $A^a$ ,  $F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a$ , sklopljenega z naboji in tokovi,  $j^a = (\rho, \vec{j}/c)$ , opiše gostota Lagrangeove funkcije

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{4} F^{ab} F_{ab} + A^a j_a.$$

- Zapišite pripadajoče Euler-Lagrangeove enačbe gibanja!
- Z upoštevanjem ustreznega nastavka za  $F^{ab}$  pokažite, da predstavljajo te enačbe Maxwelllove enačbe!
- Zapišite Hamiltonko tega sistema (kaj je tu impulz!) in preverite, kaj predstavlja ob že omenjenem nastavku za  $F^{ab}$ !

Rešeno nalogo oddajte na vajah 4. 12. 2007!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2007/08  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

Teorija grup I

4. 12. 2007

### Matrična upodobitev operatorjev in grup

1. Zapišite matrično upodobitev generatorjev grupe  $SO(3)$  za  $l = 0, 1/2, 1!$
2. Za  $l = 1/2$  zapišite še matrično upodobitev grupe  $SO(3)$ !
3. *Dodatna naloga:* Zapišite matrično upodobitev grupe  $SO(3)$  za  $l = 1!$

Namig: Najprej definirajte vektorski prostor, nad katerim boste zapisali matrično upodobitev!

Rešeno nalogo lahko oddate na vajah 11. 12. 2007!

dr. Andreja Šarlah  
 Oddelek za fiziko

študijsko leto 2007/08  
 FMF, UL

## Kvantna mehanika II

4. domača naloga

11. 12. 2007

### Klein-Gordonova enačba

Ob primerni izbiri nastavka za valovno funkcijo, to je  $\psi = \varphi + \chi$  in  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = mc^2(\varphi - \chi)$ , lahko Klein-Gordonovo enačbo za prost delec zapišemo s sistemom dveh sklopljenih diferencialnih enačb, ki sta prvega reda v odvodih po času. V matrični obliki ju zapišemo kot "Schrödingerjevo" enačbo, to je  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$ , kjer je

$$\hat{H} = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{\tau}_3 mc^2.$$

$\hat{\tau}_i$  so  $2 \times 2$  matrike, identične Paulijevim, za katere velja  $\{\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_j\}_+ = 2 \delta_{ij} \mathbf{I}$ , valovna funkcija  $\Psi$  pa je vektor,  $\Psi^\top = (\varphi, \chi)$ .

- a) Pokažite, da  $\Psi$ , ki je rešitev "Schrödingerjeve" enačbe, zadošča tudi Klein-Gordonovi enačbi!
- b) Določite vektor četverec toka v "Schrödingerjevi" reprezentaciji! *Namig: "Schrödingerjevo" enačbo pomnožite še z matriko  $\hat{\tau}_3$ .*
- c) Poiščite rešitev za prost delec!
- d) Komentirajte rešitev v nerelativistični limiti!

Vprašanji a) in b) lahko obravnavate brez upoštevanja konkretne upodobitve za matrike  $\hat{\tau}_i$ , to je le z upoštevanjem pripadajoče antikomutatorske relacije!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 18. 12. 2007!

### A.3 Študijsko leto 2008/09

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2008/09  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

1. domača naloga

26. 2. 2009

### Relativistična kvantna mehanika – Klein-Gordonova enačba

- a) Gibanje delca s spinom 0 opiše Klein-Gordonova enačba,

$$(\hat{p}^a \hat{p}_a - m_0^2 c^2) \psi = 0.$$

Obravnavajte enačbo in določite lastna stanja prostega delca!

*Namig: Pod obravnavo enačbe razumem določitev tipa enačbe in nastavka za rešitev.*

- b) Izračunajte vektor četverec toka za Klein-Gordonovo enačbo!

*Namig:  $j^a = (c\rho, \vec{j})$  in  $\nabla \cdot \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ .*

- c) Poiščite nerelativistično limito Klein-Gordonove enačbe!

*Namig: V nerelativistični limiti se energija delca le malo razlikuje od njegove mirovne energije,  $E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$ , zato lahko valovno funkcijo zapišemo v obliki*

$$\psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) \exp(-im_0 c^2 t / \hbar).$$

- d) Ocenite velikost  $\partial\varphi/\partial t$  napram  $\varphi$ .

Rešeno nalogo oddajte na vajah 5. 3. 2009!



dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fizikoštudijsko leto 2008/09  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

2. domača naloga

26. 3. 2009

### Teorija grup – Casimirjevi operatorji

1. Kaj pravi Racahov izrek?
2. Kaj je Casimirjev operator? S čim je določeno število Casimirjevih operatorjev grupe?  
Kaj je multiplet? Kakšen je fizikalni pomen Casimirjevih operatorjev?
3. Naj bodo  $\hat{U}(\alpha)$  operatorji simetrijske grupe,  $\hat{H}$  pa Hamiltonka sistema, invariantnega na to simetrijsko grupo. Definirajmo  $\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0$  in  $\psi = \hat{U}(\alpha)\psi_0$ ;  $\hat{L}_i$  so generatorji grupe,  $\hat{C}_\lambda$  pa njeni Casimirjevi operatorji. Izračunajte!
  - a)  $\{\hat{U}(\alpha), \hat{H}\}_- = ?$
  - b)  $\{\hat{L}_i, \hat{H}\}_- = ?$
  - c)  $\hat{H}\psi = ?$
  - d)  $\hat{C}_\lambda\psi = ?$
4. Izrek o kompletnosti Casimirjevih operatorjev: *Vsak operator  $\hat{A}$ , ki komutira z vsemi operatorji Liejeve grupe – torej z vsemi generatorji grupe  $\hat{L}_i$  – je nujno funkcija Casimirjevih operatorjev  $\hat{C}_\lambda$  grupe,  $\hat{A} = \hat{A}(\hat{C}_\lambda)$ .*  
Posledica: *Hamiltonka  $\hat{H}$  mora biti zgrajena iz Casimirjevih operatorjev.* (Če ima sistem določeno simetrijo, mora biti Hamiltonka invariantna na vse generatorje in Casimirjeve operatorje pripadajoče simetrijske grupe; z njimi mora komutirati.)  
Kako bi na podlagi tega zapisali splošno obliko Hamiltonke
  - a) za sistem s sferično simetrijo,
  - b) za sistem, ki je translacijsko invarianten,
  - c) za dvodelčni sistem, invarianten na izospin?

Rešeno nalogo oddajte na vajah 2. 4. 2009!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fizikoštudijsko leto 2008/09  
FMF, UL**Kvantna mehanika II**

3. domača naloga

9. 4. 2009

**Standardni model osnovnih delcev – fermionski tokovi**

Zadnjič smo na vajah zapisali splošen izraz za fermionske tokove,

$$\begin{aligned}
 j^{Aj,a} A_a^{Aj} &= \Psi_{L,R}^{\alpha i \dagger} \gamma^0 \gamma^a g^A \hat{\tau}^{Aj} \Psi_{L,R}^{\alpha i} A_a^{Aj} \\
 &= j^a A_a + j'^a Z_a + j^{+a} W_a^+ + j^{-a} W_a^- + j^{3j,a} A_a^{3j}.
 \end{aligned}$$

S pomočjo tabele vrednosti nabojev za osnovne delce:

1. Izpišite vse neničelne člene nevtralnih elektrošibkih tokov!
2. Izpišite vse neničelne člene nabitih elektrošibkih tokov!

ime	$\Gamma$	$S^{12}$	$\tau^{23}$	$Y$	$Q$	$\tau^{31}, \tau^{38}$
$u$	L	$\pm 1/2$	$1/2$	$1/6$	$2/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$d$	L	$\pm 1/2$	$-1/2$	$1/6$	$-1/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$u$	R	$\pm 1/2$	$0$	$2/3$	$2/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$d$	R	$\pm 1/2$	$0$	$-1/3$	$-1/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$\nu$	L	$\pm 1/2$	$1/2$	$-1/2$	$0$	$0$
$e$	L	$\pm 1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1$	$0$
$\nu$	R	$\pm 1/2$	$0$	$0$	$0$	$0$
$e$	R	$\pm 1/2$	$0$	$-1$	$-1$	$0$

Rešeno nalogo oddajte na vajah 16. 4. 2009!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2008/09  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

4. domača naloga

14. 5. 2009

### Sistem s časovno odvisno Hamiltonko

Spinski sistem opiše Hamiltonka

$$H = -g\mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma},$$

kjer ima magnetno polje sledečo časovno odvisnost,

$$\vec{B}(t) = \begin{cases} B\hat{e}_x; & t \leq 0 \\ (B_0 + B' \sin \omega t)\hat{e}_z; & t > 0 \end{cases}.$$

Pričakovana vrednost spina pred preklopom polja je  $\langle \sigma_x \rangle = 1$ ,  $\langle \sigma_{i \neq x} \rangle = 0$ .

1. Določite verjetnost, da je sistem po času  $t$  v začetnem stanju!
2. Določite pričakovane vrednosti komponent spina!
3. Primerjajte rezultate z rezultati v okviru teorije motenj (naredili na vajah)!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 21. 5. 2009!

## A.4 Študijsko leto 2009/10

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2009/10  
FMF, UL

### Kvantna mehanika II

2. domača naloga

3. 11. 2009

#### Ponovitev posebne teorije relativnosti – sklopitev vektorskega polja z naboji in tokovi

1. Vektorsko polje  $A^a$  je sklopljeno z naboji in tokovi, ki jih povzroča sistem delcev, katerih svetovnice opisujejo vektorji  $x_\alpha^a$ .

Zapišite/izračunajte

- (a) gostoto Lagrangeove funkcije za prosto polje,
- (b) člen, ki v gostoti Lagrangeove funkcije sklaplja vektorsko polje z naboji in tokovi delcev,
- (c) Euler-Lagrangeove enačbe gibanja,
- (d) impulze, Hamiltonko in Hamiltonove enačbe gibanja.

2. Za  $L_{ab} = (x_a p_b - x_b p_a)/\hbar$  izračunajte

- (a)  $\{L_{ab}, L_{cd}\}_P$ ,
- (b)  $\{L_i, L_j\}_P$ , kjer je  $L_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L^{jk}$ .

Pomoč:  $\{A, B\}_P = \frac{\partial A}{\partial p^a} \frac{\partial B}{\partial x_a} - \frac{\partial A}{\partial x^a} \frac{\partial B}{\partial p_a}$ .

Rešeno nalogo oddajte na vajah 10. 11. 2009!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2009/10  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

3. domača naloga

8. 12. 2009

### Teorija grup – grupa $SO(3)$

1. Koliko in katere generatorje ima? Zapišite algebro nad njimi! Kako je število generatorjev grupe  $SO(n)$  odvisno od dimenzije  $n$ ?
2. Kolikšen je rank grupe? Utemeljite! Kakšen je pomen ranka grupe? (*Rank* grupe je definiran kot največje število generatorjev, ki komutirajo med seboj.)
3. V neki upodobitvi generatorjev grupe velja  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{G})^3 = \alpha^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{G})$  in  $\alpha = |\vec{\alpha}|$ ;  $G_i$  je  $i$ -ti generator grupe,  $\vec{\alpha}$  pa zvezni parameter grupe. Zapišite v tej upodobitvi poljuben element grupe kot vsoto po potencah generatorjev!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 15. 12. 2009!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2009/10  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

4. domača naloga

12. 1. 2010

### Relativistična kvantna mehanika – Klein-Gordonova enačba

1. Obravnavajte sipanje Klein-Gordonovega delca na potencialni stopnici z višino  $V_0$ !
  - (a) Zapišite ustrezno kvantno mehansko enačbo in jo rešite!  
*Namig: Kaj velja na mestu skoka potenciala za funkcijo in njene odvode?*
  - (b) Izračunajte (tokovno) odbojnost in prepustnost te potencialne stopnice!
2. Izpeljite izraz za tok za “Schrödingerjevo” obliko Klein-Gordonove enačbe! *Namig: Ustrezni enačbi namesto  $s \Psi$  oz.  $\Psi^\dagger$  pomnožite s  $(\sigma_3 \Psi)$  oz.  $(\sigma_3 \Psi)^\dagger$ .*

Rešeno nalogo oddajte na vajah 19. 1. 2010!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2009/10  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

5. domača naloga

16. 3. 2010

### Relativistična kvantna mehanika – Diracova enačba

Obravnavajte Diracov delec na enodimenzionalni končni potencialni jami širine  $a = 10\hbar c/mc^2$  in globine  $V_0$ !

Uporabite rezultate iz *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*, W. Greiner, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1990), stran 161-166

1. Za  $V_0 = -1,2mc^2$  narišite realni del največje komponente valovne funkcije za energije  $E = 1,5 mc^2$ ;  $0,5 mc^2$ ;  $-1,5 mc^2$ ;  $-2,5 mc^2$ .
2. Za  $V_0 = -2,7mc^2$  narišite realni del največje komponente valovne funkcije za energije  $E = 1,5 mc^2$ ;  $0,5 mc^2$ ;  $-1,5 mc^2$ ;  $-2,5 mc^2$ ;  $-4 mc^2$ .
3. V obeh primerih določite energije vezanih stanj!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 23. 3. 2010!

dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fiziko

študijsko leto 2009/10  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

6. domača naloga

6. 4. 2010

### Teorija grup – (adjungirana) upodobitev grupe

1. Generatorji grupe  $\mathcal{G}$  tvorijo algebro  $\mathcal{A}$ , ki jo določajo komutatorske relacije  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ .
  - (a) Pokažite, da so matrice  $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ , upodobitev algebre  $\mathcal{A}$ !  
*Namig: Pomagajte si z Jacobijevo (trikotniško) identiteto.*
  - (b) Naj bo  $U$  unitarna matrika za prehod v novo bazo,  $T'^i = UT^iU^\dagger$ . Pokažite, da so tudi matrice  $T'^i$  upodobitev algebre  $\mathcal{A}$ !
  - (c) Pokažite, da je  $\{x^i, x^j\}_- = 0$  potreben pogoj za to, da lahko matrici  $T^i$  in  $T^j$  hkrati diagonaliziramo! *Dodatno vprašanje: Ali je pogoj tudi zadosten?*
2. Za algebro generatorjev grupe  $SU(2)$  izračunajte matrice adjungirane upodobitve, poiščite transformacijo, ki diagonalizira  $T^3$ , in zapišite matrice  $T^a$  v novi bazi!

Rešeno nalogo oddajte na vajah 13. 4. 2010!



dr. Andreja Šarlah  
Oddelek za fizikoštudijsko leto 2009/10  
FMF, UL

## Kvantna mehanika II

7. domača naloga

4. 5. 2010

### Standardni model osnovnih delcev – fermionski tokovi

Sklopitev delcev z vektorskimi polji lahko zapišemo s tokovi,

$$\begin{aligned}
 j^{Aj,a} A_a^{Aj} &= \Psi_{L,R}^{\alpha i \dagger} \gamma^0 \gamma^a g^A \hat{\tau}^{Aj} \Psi_{L,R}^{\alpha i} A_a^{Aj} \\
 &= j^a A_a + j'^a Z_a + j^{+a} W_a^+ + j^{-a} W_a^- + j^{3j,a} A_a^{3j}.
 \end{aligned}$$

S pomočjo tabele vrednosti nabojev za osnovne delce:

1. Izpišite in izvrednotite vse neničelne člene nevtralnih elektrošibkih tokov!
2. Izpišite in izvrednotite vse neničelne člene nabitih elektrošibkih tokov!

ime	$\Gamma$	$S^{12}$	$\tau^{23}$	$Y$	$Q$	$\tau^{31}, \tau^{38}$
$u$	L	$\pm 1/2$	$1/2$	$1/6$	$2/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$d$	L	$\pm 1/2$	$-1/2$	$1/6$	$-1/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$u$	R	$\pm 1/2$	$0$	$2/3$	$2/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$d$	R	$\pm 1/2$	$0$	$-1/3$	$-1/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$\nu$	L	$\pm 1/2$	$1/2$	$-1/2$	$0$	$0$
$e$	L	$\pm 1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1$	$0$
$\nu$	R	$\pm 1/2$	$0$	$0$	$0$	$0$
$e$	R	$\pm 1/2$	$0$	$-1$	$-1$	$0$

Rešeno nalogo oddajte na vajah 11. 5. 2010!

dr. Andreja Šarlah  
 Oddelek za fiziko

študijsko leto 2009/10  
 FMF, UL

## Kvantna mehanika II

8. domača naloga

25. 5. 2010

### Vodikov atom

Energijo lastnih stanj elektrona v Coulombskem potencialu jedra z nabojem  $Ze_0$  podaja zveza

$$E_{Nj} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{[N - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}]^2} \right\}^{-1/2},$$

kjer je  $\alpha$  konstanta fine strukture,  $j$  velikost skupne vrtilne količine in  $N$  glavno kvantno število.

1. Katere vrednosti lahko zavzameta kvantni števili  $N$  in  $j$ ?
2. Kolikšna je vezavna energija,  $E_{vez}$ , elektrona v stanju  $N, j$  za atome lahkih jeder?
3. Kje so meje veljavnosti zgoraj zapisane  $E_N$ ? Zakaj?
4. Izračunajte relativistični popravek k vezavni energiji elektrona v vodik v stanjih z glavnim kvantnim številom  $N = 1, 2, 3!$  Kolikšen je v posameznem stanju del, ki pripada *sklopitvi spin-tir*? Stanja označite s standardno oznako elektronskih konfiguracij v atomu vodika!
5. Zapišite kotni del delčne Diracove valovne funkcije za elektronska stanja z oznako  $2p_{3/2}!$

Rešeno nalogo oddajte na vajah 1. 6. 2010!

## B Kolokviji in izpiti

### B.1 Študijsko leto 2006/07

1. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2006/07

2. 2. 2007

1. S produkti matrik  $\gamma^a$  in  $4 \times 4$  matriko identitete (I) dobimo 16 matrik  $\Gamma^A$ , ki tvorijo Cliffordovo algebro;  $\Gamma^A = I; \gamma^0; i\gamma^k; i\gamma^k\gamma^{l \neq k}; \gamma^k\gamma^0; \gamma^1\gamma^2\gamma^3; i\gamma^k\gamma^{l \neq k}\gamma^0; i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0$ , kjer je  $k, l = 1, 2, 3$ . Za matrike  $\gamma^a$  velja antikomutatorska relacija  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} I$ .

a) Pokažite, da velja  $(\Gamma^A)^2 = I$ !

b) Če vemo, da za  $\forall \Gamma^A \neq I$  obstaja  $\Gamma^B$ , tako da velja  $\Gamma^B\Gamma^A\Gamma^B = -\Gamma^A$ , pokažite, da so matrike  $\Gamma^A \neq I$  brezsledne!

2. Ob primerni izbiri nastavka za valovno funkcijo, to je  $\psi = \varphi + \chi$  in  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = mc^2(\varphi - \chi)$ , lahko Klein-Gordonovo enačbo za prost delec zapišemo s sistemom dveh sklopljenih diferencialnih enačb, ki sta prvega reda v odvodih po času. V matrični obliki ju zapišemo kot "Schrödingerjevo" enačbo, to je  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$ , kjer je

$$\hat{H} = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2)\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{\tau}_3 mc^2.$$

$\hat{\tau}_i$  so  $2 \times 2$  matrike identične Paulijevim matrikam – zanje velja  $\{\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_j\} = 2\delta_{ij} I$ , valovna funkcija  $\Psi$  pa je vektor,  $\Psi^\top = (\varphi, \chi)$ .

a) Pokažite, da  $\Psi$ , ki je rešitev "Schrödingerjeve" enačbe, zadošča tudi Klein-Gordonovi enačbi!

b) Določite vektor četverec toka v "Schrödingerjevi" reprezentaciji!

*Namig: "Schrödingerjevo" enačbo pomnožite še z matriko  $\hat{\tau}_3$ .*

3. Za Hamiltonko iz prejšnje naloge:

a) Poiščite rešitev za prost delec!

b) Komentirajte rešitev v nerelativistični limiti!

4. V curku hitrih elektronov je pričakovana vrednost komponente spina v smeri gibanja  $1/4$ . V Diracovi upodobitvi zapišite valovno funkcijo za "povprečni" elektron iz tega curka!

Uspešno!

## 2. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2006/07

23. 5. 2007

1. Generatorji grupe  $\mathcal{G}$  tvorijo algebro  $\mathcal{A}$ , ki jo določajo komutatorske relacije  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ .
  - a) Pokažite, da so matrice  $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ , upodobitev algebre  $\mathcal{A}$ !  
*Namig: Pomagajte si z Jacobijevo (trikotniško) identiteto.*
  - b) Naj bo  $U$  unitarna matrika za prehod v novo bazo,  $T'^i = UT^iU^\dagger$ . Pokažite, da so tudi matrice  $T'^i$  upodobitev algebre  $\mathcal{A}$ !
  - c) Pokažite, da je  $\{x^i, x^j\}_- = 0$  potreben pogoj za to, da lahko matriki  $T^i$  in  $T^j$  hkrati diagonaliziramo! *Dodatno vprašanje: Ali je pogoj tudi zadosten?*
  
2. Curek Diracovih delcev z energijo  $E$  naleti na potencialni skok, ki se skalarno sklaplja z delci. Višina potencialnega skoka je  $V_0$ .
  - a) Zapišite Diracovo enačbo za posamezen delec!
  - b) Zapišite valovno funkcijo in pripadajoče parametre na obeh straneh skoka!
  - c) Kolikšen del vpadnega curka delcev se na potencialnem skoku odbije in kolikšen del je prepuščen? Pri katerih pogojih pride do popolnega odboja?
  
3. Stanje vodikovega atoma označimo z elektronsko konfiguracijo oblike  $Nl_j$ , kjer je  $N$  glavno kvantno število,  $l$  velikost tirne vrtilne količine (uporabljamo črkovne oznake, to je  $s \leftrightarrow 0$ ,  $p \leftrightarrow 1$ ,  $d \leftrightarrow 2$ , ...) in  $j$  skupna vrtilna količina.
  - a) Izračunajte, kolikšna je vezavna energija elektrona v vodikovem atomu v stanju  $2s_{1/2}$ ,  $2p_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$ ,  $2p_{5/2}$  in  $2d_{5/2}$ ! Za koliko se te energije razlikujejo od tistih, izračunanih v nerelativističnem približku?
  - b) Zapišite kotni del delčne Diracove valovne funkcije za elektronsko stanje  $2p_{3/2}$ !

Uspešno!

## QUANTUM MECHANICS II - PARTIAL EXAM 2: 2006/07

23. 5. 2007

1. The generators of the group  $\mathcal{G}$  close the algebra  $\mathcal{A}$ , which is determined by the commutation relations  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ .
  - a) Show that the matrices  $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$  are a representation of  $\mathcal{A}$ !  
*Hint: Make use of the Jacobi identity.*
  - b) Let  $U$  be a unitary matrix transforming into a new basis,  $T'^i = UT^iU^\dagger$ . Show that the matrices  $T'^i$  are also a representation of the algebra  $\mathcal{A}$ !
  - c) Show that  $\{x^i, x^j\}_- = 0$  is a necessary condition for the matrices  $T^i$  and  $T^j$  to be diagonalized together! *Additional question: Is this condition also a sufficient one?*
  
2. A beam of Dirac's particles with the energy  $E$  is incident onto a potential step with scalar coupling. The height of the potential step is  $V_0$ .
  - a) Write down the corresponding Dirac's equation!
  - b) Find the wave function and the corresponding parameters on both sides of the step!
  - c) Find the reflection and transmission coefficients! Under what conditions does the total reflection occur?
  
3. The state of the hydrogen atom is described by the electron configuration in the form of  $Nl_j$ , where  $N$  is the prime quantum number,  $l$  the orbital angular momentum ( $s \leftrightarrow 0, p \leftrightarrow 1, d \leftrightarrow 2, \dots$ ), and  $j$  the total angular momentum.
  - a) Find the binding energy of the electron in a hydrogen atom in the following states:  $2s_{1/2}$ ,  $2p_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$ ,  $2p_{5/2}$ , and  $2d_{5/2}$ ! Find the difference with respect to the non-relativistic result!
  - b) Write down the angular part of the particle-part of the Dirac's wave-function for the electron state  $2p_{3/2}$ !

Uspešno!

## IZPIT IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2006/07

4. 7. 2007

1. Liejeva grupa  $\mathcal{G}$  ima 8 generatorjev  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , ki zaprejo algebro s sledečimi komutatorskimi relacijami,  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ . Neničelne vrednosti strukturnih konstant  $f^{ijk}$  so

$ijk$	127	135	146	234	256	258	367	378	457
$f^{ijk}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

- a) Določite rank grupe  $\mathcal{G}$ ! Kakšen je njegov fizikalni pomen?  
*Pomoč: Rank grupe je definiran kot največje število generatorjev, ki komutirajo med seboj.*
- b) Kako se transformirajo strukturne konstante  $f^{ijk}$  ob transformaciji generatorjev  $x^i = T^{ij}x^j$ ?
2. V curku hitrih elektronov je pričakovana vrednost komponente spina v smeri gibanja  $1/3$ . V Diracovi upodobitvi zapišite valovno funkcijo za "povprečni" elektron iz tega curka!
3. Curek Diracovih delcev z energijo  $E$  naleti na potencialni skok, ki se skalarno sklaplja z delci (sklopitev z masnim členom!). Višina potencialnega skoka je  $V_0$ .
- a) Zapišite Diracovo enačbo za posamezen delec!
- b) Zapišite valovno funkcijo in pripadajoče parametre na obeh straneh skoka!
- c) Zapišite vektor četverec toka na obeh straneh skoka!
- d) Kolikšen del vpadnega curka delcev se na potencialnem skoku odbije? Pri katerih pogojih pride do popolnega odboja?
4. Določite energijska stanja elektrona v homogenem magnetnem polju!
- a) Izpišite ustrezno Diracovo enačbo!
- b) Zapišite nastavek za valovno funkcijo! Katera so dobra kvantna števila?
- c) Kolikšen je razmik med sosednjimi stanji?

Uspešno!

## QUANTUM MECHANICS II – EXAM: 2006/07

4. 7. 2007

1. The 8 generators of the Lie group  $\mathcal{G}$ ,  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , form a closed commutator algebra  $\{x^i, x^j\}_- = if^{ijk}x^k$ . Here, the non-zero structure constants  $f^{ijk}$  are

$ijk$	127	135	146	234	256	258	367	378	457
$f^{ijk}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

- a) Find the rank of group  $\mathcal{G}$ ! What is its physical meaning?  
*Help: The rank of a group is defined as the largest number of generators commuting with each other.*
- b) Find the transformations of the structure constants  $f^{ijk}$  under the transformation of the generators  $x'^i = T^{ij}x^j$ !
2. In the beam of relativistic electrons the expectation value of the component of spin along the direction of motion is  $1/3$ . Write down the wave function of an “average” electron in the Dirac’s representation.
3. A beam of Dirac’s particles with the energy  $E$  is incident onto a potential step with scalar coupling (coupling with the mass term!). The height of the potential step is  $V_0$ .
- a) Write down the corresponding Dirac’s equation!
- b) Find the wave function and the corresponding parameters on both sides of the potential step!
- c) Write down the four-current on both sides of the potential step!
- d) Find the reflection coefficient! Under what conditions does the total reflection occur?
4. Find the energy levels of an electron in a uniform magnetic field!
- a) Write down the corresponding Dirac’s equation!
- b) Write down the *Ansatz* for the wave function! What are the good quantum numbers?
- c) What is the energy difference between the subsequent eigen states?

Uspešno!

## IZPIT IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2006/07

1. 2. 2008

1. Grupa  $S_4$ .

- a) Zapišite elemente grupe!
- b) Zapišite popolnoma simetrično in popolnoma antisimetrično stanje sistema štirih delcev v štirih različnih enodelčnih stanjih!

## 2. Klein-Gordonova enačba za prost delec da v "Schrödingerjevi" obliki Hamiltonko

$$\hat{H} = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + \hat{\tau}_3 mc^2,$$

kjer so  $\hat{\tau}_i$   $2 \times 2$  matrike, identične Paulijevim.

- a) Pokažite, da je operator vrtilne količine dobro kvantno število za prost Klein-Gordonov delec! Kaj to pomeni?
  - b) Določite Hamiltonko za Klein-Gordonov delec v potencialu z vektorskim značajem?
3. Curek polariziranih elektronov z energijo  $E$  naleti na potencialni skok, ki ga opiše vektorski potencial  $A^a = (-V_0, \vec{0})$ ,  $V_0 > 0$ .

- a) Zapišite valovno funkcijo posameznega delca ter pripadajoče parametre! Kaj se pri prehodu meje skoka zgodi z gibalno količino delcev?
- b) Izračunajte vektor četverec toka! Izračunajte, kolikšna je prepustnost skoka za ultrarelativistične delce!

## 4. Določite energijska stanja elektrona v homogenem magnetnem polju!

- a) Izpišite ustrezno Diracovo enačbo! Zapišite nastavek za valovno funkcijo! Premislite, katera so dobra kvantna števila?
- b) Kolikšen je razmik med sosednjimi stanji?

Uspešno!



## B.2 Študijsko leto 2007/08

### 1. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2007/08 23. 1. 2008

1. Grupa  $SO(3)$ .
  - a) Koliko in katere generatorje ima? Zapišite algebro nad njimi! Kolikšen je rank grupe? Utemeljite! (*Rank* grupe je definiran kot največje število generatorjev, ki komutirajo med seboj.)
  - b) V neki upodobitvi generatorjev grupe,  $G_i$ , velja  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{G})^3 = \alpha^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{G})$  in  $\alpha = |\vec{\alpha}|$ . Zapišite v tej upodobitvi poljuben element grupe kot linearno kombinacijo generatorjev!
2. Curek pozitivno nabitih pionov z energijo  $E$  naleti na mestu  $z = 0$  na potencialni skok  $A^a = (-|V_0|, \vec{0})$ .
  - a) Zapišite ustrezno kvantnomehansko enačbo gibanja za posamezen delec!
  - b) Zapišite valovno funkcijo in pripadajoče parametre za različne dele prostora! Utemeljite izbiro nastavka!
  - c) Izračunajte vektor četverec vpadnega, odbitega in prepuščenega toka delcev! Izračunajte prepustnost za ultrarelativistične pione?
3. Prost Diracov delec opiše kvantnomehanska enačba  $\hat{p}_0 c |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ , kjer je  $\hat{H} = \hat{\alpha} \cdot \hat{p} c + \hat{\gamma}^0 m c^2$ ,  $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}$ .
  - a) Pokažite, da je operator sučnosti,  $\hat{\Lambda} = \hat{S} \cdot \hat{p} / |\hat{p}|$ , dobro kvantno število za prost Diracov delec!
  - b) Zapišite valovno funkcijo posameznega delca v curku levosučnih elektronov in ustrejni vektor četverec toka!
  - c) Iz Hamilton-Jacobijevih enačb določite časovni razvoj operatorja  $\hat{\alpha}$ !

Uspešno!

### B.3 Študijsko leto 2008/09

#### 2. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2008/09

3. 6. 2009

1. Generatorji grupe SU(3) se v fundamentalni upodobitvi z lastnimi vektorji  $u^\top = (1, 0, 0)$ ,  $d^\top = (0, 1, 0)$  in  $s^\top = (0, 0, 1)$  zapišejo v sledeči obliki:

$$\begin{aligned} \tau^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \tau^8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Operatorji višanja/nižanja so definirani s

$$\tau^\pm = \tau^1 \pm i\tau^2, V^\pm = \tau^4 \pm i\tau^5, U^\pm = \tau^6 \pm i\tau^7.$$

- Izračunajte matrice operatorjev  $\tau^\pm$ ,  $V^\pm$  in  $U^\pm$  v fundamentalni upodobitvi!
  - Izračunajte, kako operatorji višanja/nižanja delujejo na bazne vektorje fundamentalne upodobitve!
  - Zapišite bazne vektorje fundamentalne upodobitve v obliki  $|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ , kjer velja  $\tau^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ ,  $\tau^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ !
  - S pomočjo zgoraj zapisanih matrik fundamentalne upodobitve generatorjev določite, koliko Casimirjevih operatorjev ima grupa SU(3)!  
(Pozor: samo zapis splošno znanega rezultata ni dovolj!)
2. Elektron se nahaja v zunanjem polju, ki ga opiše vektor četverec  $A^a = (0, 0, Bx, 0)$ .

- Zapišite ustrezno kvantnomehansko enačbo gibanja!
- Katera so dobra kvantna števila za ta sistem? Utemeljite!
- Določite pripadajoča energijska stanja s pomočjo nastavka  $\psi(\vec{r}, t) = \Psi(x) \exp(-iEt/\hbar) \exp(ip_2y/\hbar + ip_3z/\hbar)$ !

3. Dvonivojski fermionski sistem opiše Hamiltonka  $H = -g\mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$ , kjer je  $\vec{B} = (B, 0, 0)$ . Sistem iz osnovnega stanja vzbudi harmonska motnja  $H' = -g\mu_B \vec{B}'(t) \cdot \vec{\sigma}$ , kjer je  $\vec{B}'(t) = (B_0 + B' \sin \omega t) \hat{e}_z$ .

- Zapišite valovno funkcijo sistema v trenutku preden je nastopila motnja!

- (b) Zapišite nastavek za valovno funkcijo po tem, ko je sistem pod vplivom motnje, in ustrezne gibalne enačbe, ki opisujejo časovni razvoj sistema!
- (c) Kolikšna je verjetnost, da se sistem po času  $t$  nahaja v vzbujenem stanju?

Uspešno!

## 1. IZPIT IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2008/09

24. 6. 2009

1. Generatorji grupe  $SU(3)$  zaprejo algebro  $\{\tau^i, \tau^j\}_- = if^{ijk}\tau^k$ . Neničelne vrednosti strukturnih konstant so

$ijk$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f^{ijk}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Operatorji višanja/nižanja so definirani s

$$\tau^\pm = \tau^1 \pm i\tau^2, V^\pm = \tau^4 \pm i\tau^5, U^\pm = \tau^6 \pm i\tau^7.$$

Skupaj z operatorjema  $\tau^3$  in  $\tau^8$  tvorijo nov set generatorjev grupe  $SU(3)$ .

- Pokažite, da  $\{\tau^+, \tau^-, \tau^3\}$  zaprejo algebro!
  - Določite  $U^3$  in  $V^3$  tako, da  $\{U^+, U^-, U^3\}$  in  $\{V^+, V^-, V^3\}$  zaprejo algebro!
  - Izračunajte, kaj naredijo operatorji višanja in nižanja,  $\tau^\pm$ ,  $U^\pm$  in  $V^\pm$ , na bazni vektor  $|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ , kjer velja  $\tau^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle$  in  $\tau^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ !
  - Koliko Casimirjevih operatorjev ima grupa  $SU(3)$ ? Utemeljite rezultat s podatki iz naloge, ne s citiranjem knjig, zapiskov, splošno znanih lastnosti grupe  $SU(3)$ ,...
2. Elektron se nahaja v zunanem polju, ki ga opiše vektor četverec  $A^a = (0, \vec{A})$ .
- Zapišite Hamiltonko, ki opisuje gibanje tega elektrona!
  - Izračunajte, kako se v Heisenbergovi sliki s časom spreminja operator spina!
3. Natančno in v prvem redu teorije motenj obravnavajte sistem, ki ga opiše Hamiltonka ... Ob času  $t = 0$  se sistem nahaja v stanju ...

Uspešno!

## 2. IZPIT IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2008/09

14. 9. 2009

1. Generatorji grupe SU(3) zaprejo algebro  $\{\tau^i, \tau^j\}_- = if^{ijk}\tau^k$ . Neničelne vrednosti strukturnih konstant so

$ijk$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f^{ijk}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Operatorji višanja/nišanja so definirani s  $\tau^\pm = \tau^1 \pm i\tau^2$ ,  $V^\pm = \tau^4 \pm i\tau^5$  in  $U^\pm = \tau^6 \pm i\tau^7$ . Skupaj z operatorjema  $\tau^3$  in  $\tau^8$  tvorijo nov set generatorjev grupe SU(3).

- (a) Pokažite, da  $\{\tau^+, \tau^-, \tau^3\}$  zaprejo algebro!
- (b) Izračunajte, kaj naredijo operatorji višanja in nižanja,  $\tau^\pm$ , na bazni vektor  $|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ , kjer velja  $\tau^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle$  in  $\tau^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ !
- (c) Koliko Casimirjevih operatorjev ima grupa SU(3)? Utemeljite rezultat s podatki iz naloge, ne s citiranjem knjig, zapiskov, splošno znanih lastnosti grupe SU(3),...
2. V curku hitrih elektronov je pričakovana vrednost komponente spina v smeri gibanja  $1/4$ . V Diracovi upodobitvi zapišite valovno funkcijo za "povprečni" elektron iz tega curka!
3. V okviru standardnega modela osnovnih delcev s pomočjo tabele vrednosti nabojev za osnovne delce zpišite vse neničelne člene nabitih elektrošibkih tokov!

ime	$\Gamma$	$S^{12}$	$\tau^{23}$	$Y$	$Q$	$\tau^{33}, \tau^{38}$
$u$	L	$\pm 1/2$	$1/2$	$1/6$	$2/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$d$	L	$\pm 1/2$	$-1/2$	$1/6$	$-1/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$u$	R	$\pm 1/2$	0	$2/3$	$2/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$d$	R	$\pm 1/2$	0	$-1/3$	$-1/3$	$\{c^1, c^2, c^3\}$
$\nu$	L	$\pm 1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	0
$e$	L	$\pm 1/2$	$-1/2$	$-1/2$	-1	0
$\nu$	R	$\pm 1/2$	0	0	0	0
$e$	R	$\pm 1/2$	0	-1	-1	0

4. Za sistem treh delcev v trinivojskem sistemu zapišite valovni funkciji singletnih stanj! Posamezno stanje opišejo valovne funkcije  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  in  $\psi_3$ .

Uspešno!

## B.4 Študijsko leto 2009/10

### 1. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2009/10 28. 1. 2010

1. Z upoštevanjem komutacijske relacije Lorentzove algebre,

$$\{M_{ab}, M_{cd}\}_- = i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}),$$

asimetričnosti generatorjev  $M_{ab}$  in definicije  $M^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk}$  izračunajte komutatorje za  $N_+^i = \frac{1}{2}(M^i + iM^{0i})$  in  $N_-^i = \frac{1}{2}(M^i - iM^{0i})$ ;  $\{N_+^i, N_+^j\}_-$ ,  $\{N_-^i, N_-^j\}_-$ ,  $\{N_+^i, N_-^j\}_-$ ! Interpretirajte rezultate!

2. Določite energijska stanja relativističnega delca s spinom 0 v homogenem magnetnem polju vzdolž osi  $z$ !
- Zapišite ustrezno enačbo gibanja za kvantni delec!
  - Zapišite nastavek za valovno funkcijo in ga argumentirajte! Katera so dobra kvantna števila?
  - Kolikšen je razmik med sosednjimi stanji?
3. Izračunajte tok za enačbo gibanja za prost relativističen brezmasni delec s spinom  $1/2$ !
- Zapišite ustrezno enačbo gibanja za kvantni delec!
  - Določite štirivektor toka za to enačbo!

*Namig: Zgodovinsko je bilo izhodišče pri iskanju kvantne gibalne enačbe za delce s spinom  $1/2$ , naj bo gostota verjetnosti oblike  $\psi^\dagger\psi$ .*

4. Trinivojski sistem opiše Hamiltonka  $H_0 = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ , kjer je  $n = 0, 1, 2$ . Sistem iz osnovnega stanja vzbudi harmonska motnja,  $H' = \alpha\hbar\omega_0(c^\dagger + c)\sin(\omega t)$ , kjer je  $\alpha \ll 1$  ter  $c|n\rangle = |n-1\rangle$  in  $c^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle$ . V prvem redu teorije motenj zapišite valovno funkcijo sistema za čase po nastopu harmonske motnje!

Vsaka naloga je vredna 1 točko, za 100% štejejo 3 točke.

Uspešno!

## 2. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE II: 2009/10

3. 6. 2010

1. Generatorji grupe SU(3) zaprejo algebro  $\{\hat{\tau}^i, \hat{\tau}^j\}_- = i f^{ijk} \hat{\tau}^k$ . Neničelne vrednosti strukturnih konstant so

$ijk$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f^{ijk}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Operatorji višanja/nižanja so definirani s  $\hat{\tau}^\pm = \hat{\tau}^1 \pm i\hat{\tau}^2$ ,  $\hat{V}^\pm = \hat{\tau}^4 \pm i\hat{\tau}^5$  in  $\hat{U}^\pm = \hat{\tau}^6 \pm i\hat{\tau}^7$ .

- (a) Z računom določite operator  $\hat{U}^3$ , tako da  $\{\hat{U}^+, \hat{U}^-, \hat{U}^3\}$  zaprejo algebro!
- (b) Izračunajte, kaj naredijo operatorji  $\hat{\tau}^\pm$  in  $\hat{U}^\pm$  na bazni vektor  $|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ , kjer velja  $\hat{\tau}^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^3|\lambda^3, \lambda^8\rangle$  in  $\hat{\tau}^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle = \lambda^8|\lambda^3, \lambda^8\rangle$ !
- (c) Izračunajte produkte delovanja  $\hat{\tau}^\pm$  in  $\hat{U}^\pm$  na  $\psi_0 = |0, 0\rangle$  in jih grafično predstavite na diagramu  $(\lambda^3, \lambda^8)$ !
2. Standardni model osnovnih delcev:

- (a) Tenzor vektorskih polj glede na Lorentzovo transformacijo je definiran preko komutatorja kovariantnih odvodov,

$$\{p_{0a}, p_{0b}\}_- = i\hbar \sum_{Ai} \frac{g^A}{c} \hat{\tau}^{Ai} F_{ab}^{Ai},$$

kjer je  $p_{0a} = p_a - \sum_{Ai} \frac{g^A}{c} \hat{\tau}^{Ai} A_a^{Ai}$ . Izračunajte splošen izraz za  $F_{ab}^{Ai}$ !

- (b) Izračunajte nevtralne elektrošibke tokove za proton!

3. Curek elektronov vpada na potencialno jamo z globino  $V_0$  in širino  $a$ .

- (a) Določite energije, pri katerih se elektroni resonančno sipajo! Izračunajte tri najnižje vrednosti za  $V_0 = -1,4 mc^2$  in  $a = 7\hbar c/mc^2$ !
- (b) Določite energijo vezanega stanja elektrona v limiti  $\epsilon = |E - mc^2| \ll |V_0| \ll mc^2$ !

4. "Vodikov" atom:

- (a) Pokažite, da ustreza razlika energij elektronskega stanja v atomu vodika,  $\Delta E = E_D - E_{KG}$ , prispevku zaradi sklopitve spin-tir v okviru nerelativistične obravnave!  $E_D$  in  $E_{KG}$  sta energiji, izračunani z upoštevanjem spina (Diracova enačba) oziroma brez upoštevanja le-tega (Klein-Gordonova enačba).
- (b) Zapišite kotni del delčne valovne funkcije za elektron v stanju  $3d_{5/2}$  z  $m_j = 1/2$ ! Izračunajte energijo tega stanja za atom z  $Z = 60$ !

Vsaka naloga je vredna 1 točko, za 100% štejejo 3 točke.

Uspešno!



## C Literatura

1. Walter Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
2. Walter Greiner in Bernst Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
3. D. ter Haar, *Problems in Quantum Mechanics*, Pion, London, 1975.
4. Franz Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1994. (moja)
5. Eugen Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley, New York, 1970.
6. James D. Bjorken in Sidney D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1964.
7. Walter Greiner in Joachim Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.