

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Daniel Svenšek

Rešeni primeri iz elastomehanike

delovna verzija (29. februar 2016)
LJUBLJANA 2016

Kazalo

1	Uvod	5
1.1	Operacije nad matrikami in vektorji	5
	• Vektorski produkt v matrični obliki	7
1.2	Vektorji in tenzorji	8
1.3	Rešitev Poissonove enačbe	9
1.4	Helmholtzov izrek	10
1.5	Operator ∇ in krivočrtne koordinate	11
	• Divergenca in rotor v cilindričnih koordinatah.	15
1.6	Deformacijski tenzor	16
1.6.1	Definicija	16
	• Deformacijski tenzor pri rotaciji	16
1.6.2	u_{ik} v krivočrtnih koordinatah	17
	• Deformacijski tenzor v krogelnih in cilindričnih koordinatah	18
1.7	Prosta energija deformacije	19
	• Deformacijska prosta energija enoosnega sredstva	20
	• Deformacijska prosta energija kristala	22
2	Splošne deformacije	23
	• Razteg kocke v smeri lastnih osi	24
	• Strižna deformacija kocke	25
	• Ploskev z največjo strižno napetostjo	26
	• Enoosni stisk palice	28
	• Stisk palice	30
	• Izotropni stisk (kocke)	31
	• Deformacija kvadra zaradi teže	32
	• Janssenov problem	35
	• Deformacija homogenega valja zaradi vrtenja	37

• Deformacija cevi zaradi nadtlaka	39
• Radialno-tangencialna deformacija tulca	40
• Radialna lastna nihanja elastične kroglice	42
3 Deformacije tankih plošč	45
• Poves togo vpete okrogle plošče zaradi teže	46
• Poves točkasto obremenjene prislonjene okrogle plošče	47
• Poves prislonjene okrogle plošče, obremenjen s prstanom	49
• Poves jeklenega traku zaradi teže peska	51
• Variacijski račun deformacije kvadratne plošče	53
4 Zvijanje palic	55
• Zvijanje palice s presekom elipse	57
• Zvijanje cevi s presekom elipse	60
• Zvijanje palice s trikotnim presekom	61
5 Upogib palic	65
5.1 Majhen upogib	66
5.2 Vztrajnostni momenti ploskev	67
• Vztrajnostni moment ploskev	67
5.3 Velike deformacije palic	69
• Velik upogib palice	69
5.4 Majhne deformacije palic	72
• Poves palice zaradi teže I	72
• Poves palice zaradi teže II	73
• Eulerjeva nestabilnost palice I	73
• Eulerjeva nestabilnost palice II	74
• Eulerjeva nestabilnost palice III	75
• Upogib lahke palice	75
• Lastna nihanja palice	77
• Anharmonski popravki napete strune	79
• Vrtenje palice okrog vzdolžne osi	80
6 Elastično valovanje	82
6.1 Valovanje v neomejenem sredstvu	82

• Odboj in lom elastičnega valovanja	83
6.2 Rayleighovi površinski valovi	86

1. Uvod

1.1 Operacije nad matrikami in vektorji

V naslednjih poglavjih bomo pogosto operirali z vektorji in matrikami, zato se najprej dogovorimo za zapis in ponovimo lastnosti množenja matrik, računanja determinant ter iskanja lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrik.

Dogovori. Ukvarjali se bomo samo z matrikami velikosti $m \times n$, katerih matrični elementi so realni. Matrične elemente M_{ij} bomo označevali z indeksoma tako, da bo prvi pomenil vrstico, drugi pa stolpec v matriki. Pri pisavi bomo običajno opuščali sumacijske znake za vsote po indeksih, ki se v izrazu ponovijo: $b_i = \sum_j A_{ij}a_j \equiv A_{ij}a_j$.

Množenje matrike in vektorja. Če pomnožimo matriko A z vektorjem a , dobimo vektor $b = A a$ ali po komponentah $b_i = A_{ij}a_j$.

Množenje matrik. Pokažimo, da sledi pravilo za množenje matrik iz pravila za množenje matrike z vektorjem. Izberimo naslednje zveze med vektorji a , b in c : $c = Bb$, $b = Aa$ in $c = Ca$. S pomočjo zgornjih zvez lahko izrazimo vektor c na dva načina, kot produkt vektorja b z matriko B ter kot produkt vektorja a z matriko C . Sledi, da je

$$c = Bb = BAa \quad \text{in} \quad c = Ca \quad \implies \quad C = BA. \quad (1.1)$$

Zapišimo še po komponentah

$$c_k = B_{ki}b_i = B_{ki}A_{ij}a_j = C_{kj}a_j \quad \text{in} \\ C_{kj} = B_{ki}A_{ij} \quad \left(= \sum_i B_{ki}A_{ij} \right). \quad (1.2)$$

Transformacija matrik pri prehodu med bazami. Poiščimo zvezo med matrikama A in A' , ki preslikata vektorja a in a' v b in b' ($b = Aa$, $b' = A'a'$), če izberemo naslednjo zvezo med vektorjema a in a' ter b in b' :

$$b' = Sb, \quad a' = Sa.$$

S v zgornjem izrazu je matrika. Sledi enakost

$$Sb = A'Sa. \quad (1.3)$$

Pomnožimo enačbo z leve z S^{-1} , pa je

$$S^{-1}Sb = S^{-1}A'Sa,$$

$$b = \underbrace{S^{-1}A'S}_A a \implies A = S^{-1}A'S. \quad (1.4)$$

Determinante. Vsaki kvadratni matriki lahko izračunamo determinanto, ki je skalar z naslednjimi lastnostmi:

- $\det Id = 1$.
- $\det AB = \det A \det B$.

$$\bullet \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & a_{1m} \\ b_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

- Zamenjava dveh vrstic ali dveh stolpcev determinanti spremeni predznak. Posledica tega je, da ima matrika z dvema enakima vrsticama ali dvema enakima stolpcema determinanto enako nič.
- Determinanta matrike se ne spremeni, če vrstici prištejemo linearno kombinacijo preostalih vrstic. Enako velja za stolpce.
- Determinanta trikotne matrike je enaka produktu njenih diagonalnih elementov.

Determinante računamo s pomočjo poddeterminant. Vsakemu elementu A_{ij} matrike A pripada poddeterminanta $\det A_{ij}$, ki je determinanta matrike, dobljene tako, da iz prvotne matrike odstranimo vrstico in stolpec, ki pripadata temu elementu. Determinanta celotne matrike je enaka alternirajoči vsoti produktov elementov poljubne vrstice (ali stolpca) te matrike s pripadajočimi poddeterminantami. Tako velja za poljubno vrstico i , da je $\det A = \sum_j (-1)^{i+j} A_{ij} \det A_{ij}$. Pri računanju se izplača izbrati vrstico ali stolpec, ki ima čim manj neničelnih elementov.

Determinanto matrike lahko izračunamo tudi tako, da jo z zamenjavo, seštevanjem in odštevanjem vrstic in stolpcev prevedemo na trikotno obliko, nato zmnožimo diagonalne elemente.

Lastni vektorji in lastne vrednosti. K dani matriki A iščemo tak vektor a , da bo veljala zveza

$$\begin{aligned}Aa &= \lambda a, & (1.5) \\Aa - \lambda a &= 0, \\(A - \lambda \text{Id})a &= 0.\end{aligned}$$

Če hočemo, da je zgornji sistem enačb netrivialno rešljiv, mora biti

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = 0. \quad (1.6)$$

To enačbo reši v splošnem več različnih vrednosti λ_i , katerim pripadajo ustrezni lastni vektorji a_i .

Pokažimo še, da je v primeru, ko je a lastni vektor matrike A in je B poljubna matrika, ki komutira z A , $AB = BA$, Ba tudi lastni vektor matrike A z isto lastno vrednostjo kot a . Pomnožimo enačbo (1.5) z leve z matriko B in upoštevajmo, da matriki A in B komutirata. Sledi

$$\begin{aligned}BAa &= \lambda Ba, \\ABa &= \lambda Ba, \\A(Ba) &= \lambda(Ba).\end{aligned}$$

Lastnosti podobnih matrik. Za matriki A in B , med katerima velja zveza $B = SAS^{-1}$ (S je tudi matrika), pravimo, da sta si podobni. Pokažimo, da imata taki matriki enaki determinanti:

$$\det B = \det(SAS^{-1}) = \det S \det A \det S^{-1}.$$

Ker je $SS^{-1} = \text{Id}$, je $\det S \det S^{-1} = 1$, zato je

$$\det B = \det A.$$

Naloga

Navor izrazimo kot vektorski produkt ročice in sile $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Kakšna je matrika R , ki vektor sile \mathbf{F} preslika v vektor navora \mathbf{M} ? Matrične elemente R_{ij} izrazi s komponentami x , y , z vektorja ročice \mathbf{r} .

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = R\mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_i & \hat{\mathbf{e}}_j & \hat{\mathbf{e}}_k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{bmatrix}. \\ R &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

1.2 Vektorji in tenzorji

Vektorji v fizikalnem smislu – to so tisti, ki predstavljajo fizikalne količine – so tiste n -terice, ki se pri transformacijah prostora (rotacije, inverzija) transformirajo kot krajevni vektor \mathbf{r} .¹ Podobno velja za tenzorje drugega in višjih rangov. Tenzor drugega ranga (krajše kar *tenzor*) je samo tista (m,n) -terica, katere elementi se transformirajo kot produkti ustreznih komponent fizikalnih vektorjev. Samo takšni lahko predstavljajo fizikalne količine. V izbrani bazi vektor predstavimo kot stolpec, tenzor pa kot matriko. Vsak tenzor lahko torej predstavimo z matriko, obratno pa ne velja – vsaka matrika ne predstavlja tenzorja.

Oglejmo si še, kako se transformirajo komponente vektorjev in tenzorjev. Zaradi udobja začnimo z vektorjem,

$$\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (1.7)$$

Imejmo ortogonalno transformacijo M med ortonormalnima bazama

$$\hat{\mathbf{e}}_i = M_{ij} \hat{\mathbf{e}}'_j. \quad (1.8)$$

V bazi $\hat{\mathbf{e}}'_i$ se vektor \mathbf{a} zapiše kot

$$\mathbf{a} = a_i M_{ij} \hat{\mathbf{e}}'_j = a'_j \hat{\mathbf{e}}'_j, \quad (1.9)$$

odkoder preberemo nove komponente

$$a'_j = M_{ij} a_i. \quad (1.10)$$

Zdaj pa tenzor T , ki ga s komponentami T_{ij} predstavimo takole:

$$T = T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j, \quad T_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot T \cdot \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (1.11)$$

Drugi izraz v (1.11) nam kaže, kako dobimo komponente tenzorja T , če ga poznamo kot operator (torej če poznamo njegov učinek na vektorju). Z novimi baznimi vektorji imamo

$$T = T_{ij} (M_{ik} \hat{\mathbf{e}}'_k) \otimes (M_{jl} \hat{\mathbf{e}}'_l) = T_{ij} M_{ik} M_{jl} \hat{\mathbf{e}}'_k \otimes \hat{\mathbf{e}}'_l = T'_{kl} \hat{\mathbf{e}}'_k \otimes \hat{\mathbf{e}}'_l, \quad (1.12)$$

odkoder so nove komponente

$$T'_{kl} = T_{ij} M_{ik} M_{jl}. \quad (1.13)$$

Če upoštevamo simetričnost M , lahko tudi preuredimo, $T'_{kl} = T_{ij} M_{ki}^T M_{jl}$, in reproduciramo enačbo (1.4). V tem trenutku pa nas zanima nekaj drugega: ko primerjamo enačbi (1.10) in (1.13), vidimo, da se komponente tenzorja zares transformirajo kot produkti komponent vektorja, namreč $a'_k a'_l = a_i a_j M_{ik} M_{jl}$.

¹Aksialni vektor se pri inverziji prostora transformira drugače. Izjava kljub temu obvelja, saj aksialni vektor pravzaprav ni vektor, ampak antisimetrični tenzor, $\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} W_{jk}$, kjer je W_{ij} antisimetrični tenzor.

1.3 Rešitev Poissonove enačbe

Poiščimo rešitev Poissonove enačbe

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \quad (1.14)$$

v neomejenem prostoru. Najprej bomo poiskali Greenovo funkcijo $\Phi_\delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$, torej rešitev enačbe

$$\nabla^2 \Phi_\delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.15)$$

Desno stran enačbe (1.14) lahko namreč sestavimo kot

$$-\rho(\mathbf{r}) = - \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.16)$$

in ker je enačba linearna, enako sestavimo tudi njeno rešitev

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \Phi_\delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}'). \quad (1.17)$$

Enačbo (1.15) bomo rešili s Fourierovo transformacijo. Zaradi preprostosti naj na desni strani stoji kar $\delta(\mathbf{r})$,

$$\nabla^2 \Phi_\delta(\mathbf{r}; 0) = \delta(\mathbf{r}), \quad (1.18)$$

na koncu pa upoštevamo, da velja $\Phi_\delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \Phi_\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0; 0)$. Funkcijo delta zapišemo kot

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.19)$$

funkcijo $\Phi(\mathbf{r})$ pa kot

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.20)$$

kjer je Fourierova transformiranka

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}) = \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.21)$$

Izraza (1.19) in (1.20) vstavimo v enačbo (1.15) in dobimo

$$\int d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{-k^2}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_\delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \right] = 0. \quad (1.22)$$

Izraz v oklepaju mora biti 0 (kar lahko razumemo kot enačbo (1.18) v Fourierovem prostoru), torej

$$\tilde{\Phi}_\delta(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2}. \quad (1.23)$$

$\Phi_\delta(\mathbf{r}; 0)$ sestavimo po enačbi (1.20),

$$\Phi_\delta(\mathbf{r}; 0) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Upoštevamo

$$\int d^3k = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^\infty k^2 dk,$$

pri čemer je ϑ kot med \mathbf{k} in \mathbf{r} , in izračunamo

$$\begin{aligned} \Phi_\delta(\mathbf{r}) &= -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2} \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) e^{ikr \cos \vartheta} = \\ &= -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \\ &= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{kr} = \\ &= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3 r} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3 r} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Integralni sinus v zadnji vrstici uženemo s kompleksnim integriranjem ali pa pogledamo v album integralov. Končno imamo Greenovo funkcijo Poissonove enačbe za neskončen prostor z izvorom v izhodišču:

$$\Phi_\delta(\mathbf{r}; 0) = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (1.24)$$

Če izvor ni v izhodišču, ampak v \mathbf{r}_0 , rešitev seveda le premaknemo,

$$\Phi_\delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (1.25)$$

Rešitev Poissonove enačbe (1.14) za splošno porazdelitev izvorov $\rho(\mathbf{r})$ sestavimo iz prispevkov točkastih izvorov po enačbi (1.17):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.26)$$

Integral konvergira, če porazdelitev izvorov dovolj hitro pojema z razdaljo.

Omeniti velja, da je rešitev Poissonove enačbe v primeru, ko je desna stran vektor,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (1.27)$$

popolnoma analogna, saj smemo vsako komponento te vektorske enačbe obravnavati kot ločeno skalarno enačbo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.28)$$

1.4 Helmholtzov izrek

Po Helmholtzovem izreku lahko vsako dovolj gladko in z razdaljo dovolj hitro padajoče vektorsko polje \mathbf{v} zapišemo kot vsoto brezvrtničnega in brezizvirnega vektorskega polja. Odtod tudi sledi, da je tako vektorsko polje popolnoma določeno s svojima divergenco in rotorjem.

Vpeljimo vektorsko polje \mathbf{w} :

$$\nabla^2 \mathbf{w} = -\mathbf{v}, \quad (1.29)$$

tako da je po enačbi (1.28)

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.30)$$

Spomnimo, da je (1.30) rešitev za neskončen prazen prostor, in jo zato tukaj navajamo le kot primer. V drugih primerih je rešitev drugačna, pomembno je le, da (za dovolj nesingularne porazdelitve \mathbf{v}) vedno obstaja. V (1.29) uporabimo identiteto $\nabla \nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla^2 \mathbf{w} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{w}$ in dobimo

$$\mathbf{v} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \quad (1.31)$$

torej

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.32)$$

kjer smo vpeljali skalarni Φ in vektorski \mathbf{A} potencial vektorskega polja \mathbf{v} . Prvi prispevek je brezvrtničen (irotacionalen), drugi pa brezizviren (solenoidalen).

Pokažimo še, da je vektorsko polje \mathbf{v} popolnoma določeno s svojima divergenco ρ in rotorjem \mathbf{j} . Divergenca enačbe (1.32) da

$$\nabla^2 \Phi = -\rho \quad (1.33)$$

in odtod skalarni potencial vektorskega polja \mathbf{v} (za neskončen prazen prostor),

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.34)$$

Rotor enačbe (1.32) da

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{j}. \quad (1.35)$$

Spet uporabimo gornjo vektorsko identiteto ter upoštevamo, da po definiciji (1.31) velja $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, pa dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{j} \quad (1.36)$$

in odtod vektorski potencial vektorskega polja \mathbf{v} (za neskončen prazen prostor)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.37)$$

Polje \mathbf{v} sledi potem iz enačbe (1.32).

1.5 Operator ∇ in krivočrtne koordinate

Poglejmo, kako se operator krajevnega odvajanja ∇ zapiše v krivočrtnih ortogonalnih koordinatnih sistemih. Ne bomo navajali formul, gre nam za razumevanje. Zanima nas, kako bi se zadeve lotili v splošnem primeru in kako v praksi za cilindrične ali krogelne koordinate. Ko stvar enkrat razumemo, seveda s pridom uporabljamo formule.

Operator ∇ je v splošnem

$$\nabla = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (1.38)$$

kjer so h_i skalni faktorji,

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|, \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (1.39)$$

ki povedo, kolikšen dolžinski element ustreza infinitezimalni spremembi koordinate q_i . To je bistveno, saj gre za odvajanje po kraju, torej po dolžini. Vidimo, da velja $ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2$. Pri krivočrtnih, a ortogonalnih koordinatah, se z vpeljavo skalnih faktorjev ognemo potrebi po metričnem tenzorju – tega zares rabimo šele pri neortogonalnih koordinatah. Zaradi kompletnosti omenimo, da je skalni faktor $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ kvadratni koren ustrezne diagonalne komponente metričnega tenzorja $g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$, njegova definicija pa je smiselna pri ortogonalnih koordinatah, ko je g_{ij} diagonalen.

Še kratek izlet v deželo splošnih (neortogonalnih) krivočrtnih koordinat². Tam vpeljemo dve bazi, kovariantno in kontravariantno. Kovariantni bazni vektor \mathbf{e}_i leži na tangenti krivulje, ki jo dobimo, če spreminjamo i -to koordinato, ostale pa so fiksne. Vpeljemo ga, kot smo bazne vektorje vpeljevali doslej, le da ga ne normiramo:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}. \quad (1.40)$$

Kontravariantni bazni vektor \mathbf{e}^i pa leži v smeri lokalne normale na ustrezno koordinatno ploskev—ploskev, na kateri je i -ta koordinata konstantna. Tudi ta vektor ni normiran, njegovo dolžino izberemo tako, da velja

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \quad (1.41)$$

kjer je δ_j^i običajni Kronecker delta. Ortogonalnost \mathbf{e}^i in \mathbf{e}_j za $i \neq j$ sledi direktno iz konstrukcije, saj je kontravariantni vektor po definiciji pravokoten na koordinatno ploskev, kovariantni vektorji $j \neq i$ pa ležijo na njej. Primer kovariantne in kontravariantne baze srečamo v fiziki trdne snovi: direktna in recipročna baza pri opisu kristalov.

Zdaj lahko vektor zapišemo na dva načina:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i. \quad (1.42)$$

H kovariantnim baznim vektorjem \mathbf{e}_i sodijo kontravariantne komponente a^i , h kontravariantnim baznim vektorjem \mathbf{e}^i pa kovariantne komponente a_i . Kovariantnost označimo s spodnjim indeksom, kontravariantnost pa z zgornjim. Termina kovariantnost in kontravariantnost se nanašata na transformacijske lastnosti vektorja/komponent pri transformacijah koordinat. Transformacija, po kateri se transformirajo kontravariantni vektorji/komponente, je inverzna tisti, po kateri se transformirajo kovariantni vektorji/komponente. Vidimo torej, da se komponente vektorja transformirajo po inverzni transformaciji glede na tisto, po kateri se transformirajo bazni vektorji, tako da je vektor, pravilno, invarianten na transformacijo. To poznamo

²Tega v nadaljevanju ne bomo rabili. Vprašanje se je pojavilo pri uri, zato dodajam to pojasnilo.

že pri običajni ortonormirani bazi—tudi tam se bazni vektorji in komponente transformirajo po inverznih si transformacijah (enačbi (1.8) in (1.10)).

Če enačbo (1.42) skalarno pomnožimo enkrat z \mathbf{e}_j , drugič pa z \mathbf{e}^j , in upoštevamo ortogonalnost (1.41), dobimo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = a_j = a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv g_{ij} a^i, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^j = a^j = a_i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \equiv g^{ij} a_i, \quad (1.44)$$

kjer smo vpeljali še kovariantni, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, in kontravariantni, $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$, metrični tenzor. Enačbi (1.43) in (1.44) kažeta, da kovariantne (kontravariantne) komponente vektorja \mathbf{a} dobimo tako, da vektor skalarno množimo s kovariantnimi (kontravariantnimi) baznimi vektorji. Obenem pokažeta, da ene komponente dobimo iz drugih z množenjem z ustreznim metričnim tenzorjem. Če razstavimo še bazne vektorje same, dobimo

$$\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}^i = g_{ji} \mathbf{e}^i, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{e}^j = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i) \mathbf{e}_i = g^{ji} \mathbf{e}_i. \quad (1.46)$$

In kako je z operatorjem ∇ ? Za gradient mora po definiciji veljati

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.47)$$

Če $d\mathbf{r}$ zapišemo s krivočrtnimi koordinatami q^i ,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{e}_i dq^i, \quad (1.48)$$

dobimo

$$df = \nabla f \cdot (\mathbf{e}_i dq^i) \quad (1.49)$$

in odtod z upoštevanjem ortogonalnosti (1.41)

$$\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial q^i}. \quad (1.50)$$

Pri ortogonalnih koordinatah \mathbf{e}_i in \mathbf{e}^i ležita v isti smeri in sta v splošnem še vedno neenotska. Da se izognemo rabi dveh baz, vpeljemo enotske bazne vektorje

$$\hat{\mathbf{e}}_i \equiv \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|}, \quad |\mathbf{e}_i|^2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = g_{ii} \equiv h_i^2, \quad (1.51)$$

kjer smo uporabili (1.45) in (1.41), na koncu pa ponovno vpeljali skalne faktorje, ki smo jih že srečali v en. (1.39). Kovariantni in kontravariantni bazni vektorji so tako

$$\mathbf{e}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{e}^i = \frac{1}{h_i} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.52)$$

en. (1.50) pa se s tem prepíše v

$$\nabla = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (1.53)$$

oziroma v (1.38), če koordinate označimo s q_i in ne več s q^i .

Vrnimo se torej h krivočrtnim ortogonalnim koordinatam. Gradient skalarnega polja je seveda

$$\nabla f = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (1.54)$$

Poglejmo, kako bi izrazili divergenco in rotor vektorskega ter Laplace skalarnega polja:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\sum_j v_j \hat{\mathbf{e}}_j \right), \quad (1.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \times \left(\sum_j v_j \hat{\mathbf{e}}_j \right), \quad (1.56)$$

$$\nabla^2 f = \left(\sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\sum_j \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right), \quad (1.57)$$

Laplace vektorskega polja pa je že manj pregleden:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\sum_j \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \otimes \sum_k v_k \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (1.58)$$

V vseh primerih (1.55)-(1.58) je bistveno, da ne odvajamo samo komponent, ampak tudi bazne vektorje in koeficiente h_i . Pri (1.58) je treba paziti še, da odvajamo vse, kar stoji desno od operatorja odvajanja: odvajanje iz prve vsote deluje na člene v drugi in tretji vsoti.

Poznati moramo odvode baznih vektorjev, ki jih v splošnem dobimo iz definicije krivočrtnih koordinat. Oglejmo si primer krogelnih koordinat:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Bazne vektorje in koeficiente h_i dobimo po enačbi (1.39) z odvajanjem krajevnega vektorja \mathbf{r} po uvedenih koordinatah q_i , ki so v tem primeru r , θ in ϕ ,

$$\begin{aligned} h_r \hat{\mathbf{e}}_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z, \quad h_r = 1, \\ h_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r (\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z), \quad h_\theta = r, \\ h_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta (-\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y), \quad h_\phi = r \sin \theta, \end{aligned}$$

odtod pa krajevne odvode baznih vektorjev. V praksi včasih začnemo šele tukaj. Pomagamo si z geometrijo, ugotovimo, da je $h_r = 1$, $h_\theta = r$ in $h_\phi = r \sin \theta$, torej

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}, \quad (1.59)$$

ter kar takoj zapišemo neničelne odvode:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad , \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad , \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad , \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Naloga

Izberimo najpreprostejši primer: zapišimo divergenco in rotor v cilindričnih koordinatah (r, ϕ, z) .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \end{aligned}$$

bazni vektorji so

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad h_r = 1, \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad h_\phi = r, \\ \hat{\mathbf{e}}_z &, \quad h_z = 1. \end{aligned}$$

Operator ∇ je po enačbi (1.38)

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{r \partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Neničelna odvoda baznih vektorjev sta

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad , \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{e}}_r.$$

Divergenco zapišemo kot v (1.55):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{r \partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + v_z \hat{\mathbf{e}}_z);$$

poleg diagonalnih členov skalarni produkt preživi še člen

$$\frac{v_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \frac{v_r}{r},$$

tako da je divergenca

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.61)$$

Rotor zapišemo kot v (1.56),

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{r \partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + v_z \hat{\mathbf{e}}_z),$$

in upoštevamo, da je $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_z = \hat{e}_r$, $\hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\phi$ in $\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_z$. Poleg izvendiagonalnih členov vektorski produkt preživi še člen

$$\frac{v_\phi}{r} \hat{e}_\phi \times \frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} = -\frac{v_\phi}{r} \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \frac{v_\phi}{r} \hat{e}_z,$$

tako da je rotor

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{r \partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\phi + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_r}{r \partial \phi} \right) \hat{e}_z. \quad (1.62)$$

1.6 Deformacijski tenzor

1.6.1 Definicija

Pri deformaciji se spremenijo razdalje med točkami telesa. Vzemimo bližnji točki nedeformiranega telesa, ki naj ju povezuje vektor dx , tako da je razdalja med njima $dl = \sqrt{dx_i^2}$. Ob deformaciji se točki premakneta, tako da ju zdaj povezuje vektor $dx' = dx + du$, kjer je du majhna razlika premikov ene in druge točke. Razdalja med premaknjenima točkama je $dl'^2 = (dx_i + du_i)^2$. Zapišimo $du_i = (\partial u_i / \partial x_j) dx_j$ in s tem

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k. \quad (1.63)$$

Drugi člen na desni pišimo v simetrični obliki, v tretjem členu pa preimenujmo indekse:

$$dl'^2 = dl^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i dx_j. \quad (1.64)$$

Odtod sledi

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.65)$$

kjer smo definirali deformacijski tenzor u_{ij} :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (1.66)$$

Odslej se bomo ukvarjali le z linearnim delom deformacijskega tenzorja, torej

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.67)$$

Naloga

Izračunajmo, kakšen je deformacijski tenzor, če telo togo zavrtimo. Zaradi preprostosti naj bo rotacija kar okrog z osi.

Po definiciji (1.65) mora biti deformacijski tenzor pri togi rotaciji 0, saj ta ohranja dolžine. Preverimo. Rotacija za kot ϕ okrog osi z je podana z matriko

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathcal{R}\mathbf{x}. \quad (1.68)$$

Za izračun deformacijskega tenzorja potrebujemo premike \mathbf{u} točk telesa, $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, torej

$$\mathbf{u} = \mathcal{R}\mathbf{x} - \mathbf{x} = (\mathcal{R} - \mathcal{I})\mathbf{x}.$$

Najprej izračunamo premik \mathbf{u} ,

$$\mathbf{u} = [x(\cos \phi - 1) - y \sin \phi, x \sin \phi + y(\cos \phi - 1), 0],$$

nato pa deformacijski tenzor u_{ij} . Če upoštevamo le linearni del (1.67), dobimo neničeln rezultat,

$$\mathbf{u}^{lin} = \begin{bmatrix} \cos \phi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.69)$$

še celotni tenzor (1.66) s kvadratnimi členi je ničeln:

$$u_{xx} = u_{yy} = \cos \phi - 1 + \frac{1}{2}(\cos \phi - 1)^2 = 0.$$

Poučen je še primer majhnih zasukov $\delta\phi$. Iz enačbe (1.69) vidimo, da je linearni del deformacijskega tenzorja v prvem redu $\delta\phi$ enak 0. To mora biti, saj deformacijski tenzor ne vsebuje antisimetričnega dela gradienta premikov $\nabla\mathbf{u}$, za katerega vemo, da predstavlja infinitezimalno rotacijo (preverite).

1.6.2 u_{ik} v krivočrtnih koordinatah

Poglejmo, kako zapišemo linearni del deformacijskega tenzorja (1.67) v krivočrtnih ortogonalnih koordinatnih sistemih. Najprej bomo postopali splošno in zato precej formalno, v nadaljevanju pa bomo na praktičen način obdelali cilindrične in krogelne koordinate.

Vidimo, da (1.67) ni nič drugega kot simetrizirani gradient vektorja deformacije \mathbf{u} . Za hip pozabimo na simetrizacijo in zapišemo gradient deformacije $\nabla\mathbf{u}$, ki je seveda tenzor. Upoštevajmo, da je po enačbi (1.38) $\nabla = \sum_k \hat{\mathbf{e}}_k (1/h_k) \partial/\partial q_k$, in pišimo $\mathbf{u} = \sum_k u_k \hat{\mathbf{e}}_k$:

$$\nabla\mathbf{u} = \sum_l \hat{\mathbf{e}}_l \frac{\partial}{h_l \partial q_l} \otimes \sum_k u_k \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (1.70)$$

kjer \otimes označuje direktni (ali tenzorski) produkt. Pri odvajanju moramo paziti, saj so poleg komponent u_k v splošnem od kraja odvisni tudi bazni vektorji $\hat{\mathbf{e}}_k$:

$$\nabla\mathbf{u} = \sum_{l,k} \frac{\partial u_k}{h_l \partial q_l} \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_k + u_k \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}{h_l \partial q_l}. \quad (1.71)$$

Z definicijo

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_j}{h_i \partial q_i} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (1.72)$$

kjer je Γ_{ij}^k t.i. Christoffelov simbol, zapišemo

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial u_k}{h_l \partial q_l} \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_k + \sum_m u_k \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \Gamma_{lk}^m \hat{\mathbf{e}}_m \right) \quad (1.73)$$

oziroma po komponentah:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{h_i \partial q_i} + \sum_k u_k \Gamma_{ik}^j, \quad (1.74)$$

pri čemer smo upoštevali

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (1.75)$$

V teoriji elastičnosti nas zanima le, kako se pri deformaciji spremenijo razdalje med deli telesa, zato smemo $\nabla \mathbf{u}$ simetrizirati. Vemo namreč, da antisimetrični del gradienta deformacije predstavlja rotacijo, ta pa razdalje ohranja. Linearni del deformacijskega tenzorja je torej

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{h_j \partial q_j} + \frac{\partial u_j}{h_i \partial q_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_k u_k \left(\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{ik}^j \right). \quad (1.76)$$

V kartezičnih koordinatah res dobimo izraz (1.67), saj so bazni vektorji konstantni in $h_i = 1$. Poglejmo, kako se linearni del deformacijskega tenzorja zapiše v cilindričnih in krogelnih koordinatah.

Naloga

Zapišimo deformacijski tenzor v krogelnih (r, θ, ϕ) in cilindričnih (r, ϕ, z) koordinatah.

Najprej gledneje je, če začnemo z enačbo (1.71). Komponente gradienta in gradiente baznih vektorjev smo že zapisali v (1.59) in (1.60). Prva vsota v enačbi (1.71) nam da člene, ki so prisotni tudi v kartezičnem primeru (razlikujejo se le zaradi drugačnega gradienta). Pomagajmo si z (1.60) in razpišimo drugo vsoto v (1.71):

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = \dots &+ \frac{u_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{u_\theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \frac{u_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \otimes \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{u_\theta}{r \tan \theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi \otimes \hat{\mathbf{e}}_\phi - \frac{u_\phi}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \otimes \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{u_\phi}{r \tan \theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned}$$

Dodajmo še člene iz prve vsote, zapišimo po komponentah upoštevaje (1.75) in simetrizirajmo,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})_{ij} + (\nabla \mathbf{u})_{ji}], \quad (1.77)$$

tako da dobimo

$$\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
u_{\theta\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \\
u_{\phi\phi} &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{r\partial\phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r \tan\theta}, \\
u_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} \right), \\
u_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{r\partial\phi} \right), \\
u_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{r\partial\theta} - \frac{u_\phi}{r \tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{r\partial\phi} \right). \tag{1.78}
\end{aligned}$$

Komponente deformacijskega tenzorja v cilindričnih koordinatah poiščemo po istem kopitu. Navedimo le rezultat:

$$\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
u_{\phi\phi} &= \frac{\partial u_\phi}{r\partial\phi} + \frac{u_r}{r}, \\
u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
u_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\phi} \right), \\
u_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\
u_{\phi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{r\partial\phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right). \tag{1.79}
\end{aligned}$$

1.7 Prosta energija deformacije

Prosta energija je kot vsak skalar invariantna na simetrijske transformacije prostora in časa (inverzija in rotacije prostora, inverzija časa). Če nas zanima njena odvisnost od deformacijskega tenzorja v primeru izotropnega telesa, jo smemo zato zapisati le s skalarji (skalarnimi invariantami) tega tenzorja.

Kako dobimo skalarje? S skalarnim produktom, ki ga v ortonormalnih bazah tvorimo z δ_{ij} , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij}$, pri tem pa si lahko pomagamo še z vektorskim produktom, ki ga tvorimo z ϵ_{ijk} , $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. S skalarnim produktom število indeksov zmanjšamo za 2, z vektorskim pa za 1. Zmanjšanju števila indeksov pravimo tudi kontrakcija. Zgolj kot primer navedimo neničelne skalarje nižjih redov, ki jih lahko tvorimo, če imamo na voljo vektor a_i

in simetrični tenzor 2. ranga A_{ij} :

$$\begin{aligned} A_{ij}\delta_{ij} &= A_{ii}, \\ a_i a_j \delta_{ij} &= a_i^2, \\ A_{ij} A_{kl} \delta_{ij} \delta_{kl} &= A_{ii}^2, \\ A_{ij} A_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} &= A_{ij}^2, \\ A_{ij} a_k a_l \delta_{ij} \delta_{kl} &= A_{ii} a_k^2, \\ A_{ij} a_k a_l \delta_{ik} \delta_{jl} &= A_{ij} a_i a_j, \end{aligned}$$

Za antisimetrični tenzor W_{ij} pa sta neničelna še

$$\begin{aligned} W_{ij} a_k \epsilon_{ijk}, \\ W_{ij} W_{kl} a_m \delta_{jk} \epsilon_{ilm} = W_{ij} W_{jl} a_m \epsilon_{ilm}, \end{aligned}$$

ki pa, če je a_i pravi (polarni) vektor, nista skalarja, ampak psevdoskalarja, ki pri inverziji prostora spremenita predznak. Psevdoskalarji so dovoljeni le v sistemih, ki niso invariantni na inverzijo prostora (kiralni sistemi).

V okolici ravnovesja mora biti prosta energija pozitivno definitna, t.j. za vsak neničeln u_{ij} se mora povečati glede na ravnovesno vrednost pri $u_{ij} = 0$, sicer stanje z $u_{ij} = 0$ ne bi bilo ravnovesje. Za tvorbo skalarjev imamo tokrat na voljo le simetrični tenzor u_{ij} . Skalar 1. reda u_{ii} tako odpade, dobra pa sta skalarja 2. reda, ki nam tudi zadostujeta. To sta kvadrat sledi, u_{ii}^2 in sled kvadrata, $u_{ij}u_{ij}$. Gostota proste energije je tako oblike

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\lambda u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2, \quad (1.80)$$

kjer sta λ in μ Laméjeva elastična koeficienta za izotropno telo. Lepši je zapis, kjer deformacijski tenzor razdelimo na izotropni in brezsledni del,

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}K u_{ii}^2 + \mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.81)$$

Pri izotropnem stisku je zdaj neničeln le prvi člen, pri čistem strigu pa le drugi. Zato morata biti kompresijski modul K in strižni modul μ vsak zase pozitivna (kar pa ne velja za λ).

Naloga

Zapišimo deformacijsko prosto energijo za enoosno sredstvo. Enoosno sredstvo premore preferirano os, ki pa ni usmerjena. Zvezna simetrija (vse rotacije) je tako zlomljena, vendar ne do konca kot pri kristalu – preostanejo še vse rotacije okrog preferirane osi. Kakšna pa je prosta energija v primeru usmerjene osi?

V primeru, ko sredstvu po zlomu polne zvezne simetrije izotropnega telesa še vedno preostane podgrupa zveznih simetrij, moramo najprej identificirati objekt, ki določa to reducirano

simetrijo, t.i. simetrijsko spremenljivko. V našem primeru je to os in iščemo nekaj, s čimer bi jo matematično opisali. Najbrž najprej pomislimo na vektor, ki pa ne ustreza, ker je os neusmerjena (ima višjo simetrijo). Potem pomislimo na “kvadrat” vektorja, in v tem smislu je to enoosni simetrični tenzor $n_i n_j$, kjer je \mathbf{n} enotski vektor na osi. Najelegantneje je, da vzamemo le njegov brezsledni del, saj le ta opisuje os (izotropni del je v tem smislu seveda irelevanten):

$$Q_{ij} = n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (1.82)$$

Sedaj je naša naloga pravzaprav preprosta: poiskati moramo skalarje 2. reda v u_{ij} , ki jih tvorimo iz u_{ij} in Q_{ij} . Poleg izotropnih skalarjev u_{ii}^2 in u_{ij}^2 imamo zdaj še tri dodatne člene:

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} c_1 u_{ii}^2 + \frac{1}{2} c_2 u_{ij}^2 + \frac{1}{2} c_3 Q_{ij} u_{ij} u_{kk} + \frac{1}{2} c_4 (Q_{jk} u_{ij} u_{ik} + Q_{ik} u_{ij} u_{jk}) / 2 + \frac{1}{2} c_5 (Q_{ij} u_{ij})^2. \quad (1.83)$$

Četrti člen smo zapisali v simetrični obliki. Na to je treba paziti, da je napetostni tenzor $p_{ij} = \partial f / \partial u_{ij}$ pravilen.

Kako pa je, če je os usmerjena in jo torej opisuje vektor \mathbf{n} ? V tem primeru so dovoljeni vsi členi v (1.83), saj lahko tenzor Q_{ij} po definiciji (1.82) sestavimo iz vektorja \mathbf{n} (členi z višjo simetrijo so vedno dovoljeni – tudi v prejšnjem primeru smo ohranili izotropna člena). Zaradi tenzorske narave u_{ij} pa ni nobenih dodatnih možnosti za sklopitev u_{ij} in n_i .

Koristen je še nekoliko drugačen pogled, s katerim tudi gornja morda obskurna simetrizacija postane sistematična. Najsplošnejši izraz za gostoto proste energije, drugega reda v u_{ij} , je kvadratna forma

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{ij} u_{kl}, \quad p_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_{ij}} = C_{ijkl} u_{kl}, \quad (1.84)$$

kjer je C_{ijkl} matrika snovnih parametrov – posplošena elastična konstanta. Ker je u_{ij} simetričen in nastopa kvadratno, že po definiciji sledi permutacijska simetrija $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$, tako da lahko ima C_{ijkl} največ 21 različnih elementov. V izotropnem sredstvu sme vsebovati le δ_{ij} . Primerjava izrazov (1.84) in (1.80) pokaže, da je elastična konstanta izotropnega sredstva $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il})$. Elastična konstanta enoosnega sredstva pa sme vsebovati tudi Q_{ij} . Po primerjavi z enačbo (1.83) imamo tokrat

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= c_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{c_2}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \frac{c_3}{2} (Q_{ij} \delta_{kl} + Q_{kl} \delta_{ij}) + \\ &+ \frac{c_4}{4} (Q_{jl} \delta_{ik} + Q_{il} \delta_{jk} + Q_{jk} \delta_{il} + Q_{ik} \delta_{jl}) + c_5 (Q_{ij} Q_{kl}). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Členi v oklepajih torej služijo simetrizaciji in so dodani zato, da ima C_{ijkl} permutacijsko simetrijo, ki smo jo zahtevali. S tem je tudi napetostni tenzor (1.84) pravilen. Primerjava enačbe (1.85) z enačbo (1.83) pokaže, da bi bila (zaradi komutativnosti $u_{ij} u_{kl} = u_{kl} u_{ij}$) dovolj že delna simetrizacija—seveda pa ne škodi, če naredimo popolno kot v (1.85).

Naloga

Zapišimo deformacijsko prosto energijo za kristal s tetragonalno in kubično simetrijo.

Kristali nimajo več zveznih, ampak le diskretne simetrije – n -števne osi in zrcaljenja. Tokrat začnemo s splošnim izrazom za prosto energijo (1.84). Ugotoviti je treba, kateri elementi C_{ijkl} se pri simetrijskih operacijah preslikajo drug v drugega in so zato enaki. Čim nižja je simetrija kristala, tem manj je simetrijskih operacij in tem več elementov C_{ijkl} je zato različnih.

Začnimo s tetragonalnim kristalnim sistemom (primer je pokončna kvadratna prizma), kot predstavnika si izberimo simetrijsko grupo C_{4v} , ki vsebuje štirištevno os (os z) in zrcaljenja prek dveh med seboj pravokotnih ravnin, ki vsebujeta štirištevno os (normali zrcalnih ravnin naj bosta v smereh x in y). Zrcaljenja preslikajo

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z \quad (1.86)$$

in

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z. \quad (1.87)$$

Spomnimo se, da se komponente tenzorjev transformirajo kot produkti komponent vektorjev. Tako imamo pri transformaciji (1.86), na primer, $C_{xyyy} \rightarrow -C_{xyyy}$ in $C_{xxyy} \rightarrow C_{xxyy}$. Če je to hkrati simetrijska operacija kristala, potem morajo biti komponente, ki se slikajo druga v drugo, enake. To pomeni, da so vsi C_{ijkl} z lihimi številom indeksov x ali y ničelni. Vrtež za kot $\pi/2$ okrog osi z pa preslika

$$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow z \quad (1.88)$$

in zato $C_{xxxx} = C_{yyyy}$, $C_{xxzz} = C_{yyzz}$, $C_{zxzx} = C_{zyzy}$. Gostota proste energije za kristal tetragonalnega sistema je torej

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}C_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2}C_{zzzz}u_{zz}^2 + C_{xxzz}(u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ &+ C_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + 2C_{xyxy}u_{xy}^2 + 2C_{xzzz}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Kubični kristalni sistem ima tetragonalno simetrijo, zato bo elastičnih konstant največ 6, kot v enačbi (1.89). Zaradi dodatnih simetrijskih operacij pa jih pričakujemo še manj. Vrteži za kot $\pi/2$ okrog osi x in y preslikajo

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow -y \quad (1.90)$$

in

$$x \rightarrow -z, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow x. \quad (1.91)$$

Odtod sledi $C_{xxxx} = C_{zzzz}$, $C_{xxzz} = C_{xxyy}$ in $C_{xyxy} = C_{xzzz}$. Gostota proste energije za kristal kubičnega sistema je torej

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}C_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + C_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ &+ 2C_{xyxy}(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \end{aligned} \quad (1.92)$$

2. Splošne deformacije

Za opis deformacij bomo uporabljali naslednje količine.

Deformacijo bomo opisali z *Greenovim tenzorjem*

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Uporabili bomo tudi zvezo med napetostjo v telesu in deformacijo. Imenujemo jo *Hookov zakon*:

$$p_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

oziroma v obratni smeri

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu} p_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} p_{kk} \delta_{ij}. \quad (2.2)$$

Cauchyjev izraz bo opisoval ravnovesni pogoj za gostoto volumsko porazdeljenih zunanjih sil f_i in za površinske sile F_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + f_i &= 0, \\ p_{ik} n_k &= F_i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kjer je n_k vektor normale na površino. Elastične lastnosti materiala bomo opisovali bodisi po *Laméjevo* z μ in λ ali po *Youngu* in *Poissonu* z E in σ . Med izbirama snovnih konstant veljata zvezi

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 + 2\sigma)(1 + \sigma)},$$

oziroma v obratni smeri

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \quad \sigma = \frac{1}{2(1 + \mu/\lambda)}.$$

Gibanje obremenjenega elastičnega telesa bomo opisali z *Navierovo* enačbo, ki jo dobimo iz Cauchyjevega izraza tako, da vanj vstavimo Hookov zakon:

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad (2.4)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Hookov zakon in Navierova enačba, izražena z E in σ :

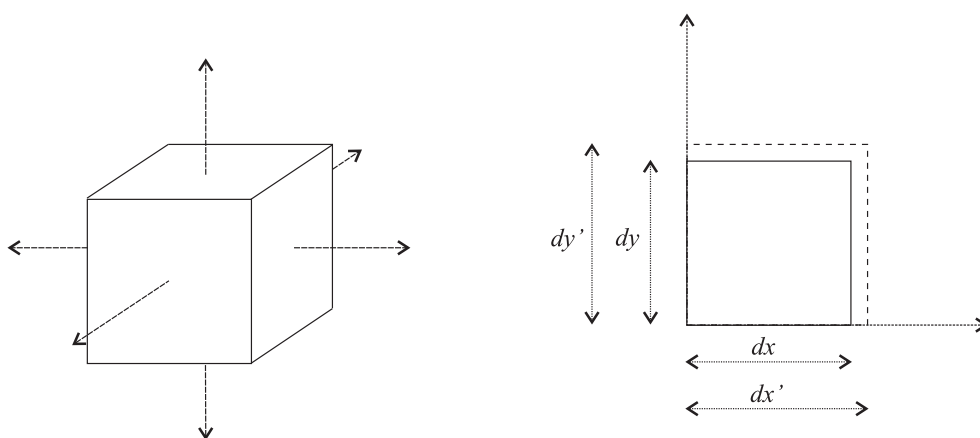
$$p_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (2.6)$$

$$u_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\sigma)p_{ij} - \sigma p_{kk} \delta_{ij}], \quad (2.7)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right). \quad (2.8)$$

Naloga

Izračunajmo spremembo prostornine kocke, ki jo raztegnemo v smeri lastnih osi. Deformacija je podana z diagonalnimi komponentami deformacijskega tenzorja u_{xx} , u_{yy} in u_{zz} , ki niso odvisne od kraja.



Slika 2.1: Kocko raztegnemo v smeri lastnih osi.

Ogledali si bomo spremembo prostornine kockice z volumnom $dV = dx dy dz$ v najnižjem redu. Deformacijski tenzor smo vpeljali z enačbo (1.65) kot količino, ki pove, za koliko se ob deformaciji spremeni razdalja med bližnjima točkama. Če enačbo (1.65) lineariziramo, dobimo

$$dl' = dl \sqrt{1 + \frac{2u_{ij} dx_i dx_j}{dl^2}} \approx dl \left(1 + u_{ij} \frac{dx_i}{dl} \frac{dx_j}{dl} \right) = dl (1 + u_{ij} l_i l_j), \quad (2.9)$$

kjer so l_i smerni kosinusi vektorja dx med točkama. Poglejmo, kako se spremenijo dolžine vektorjev dx , vzporednih koordinatnim osem, na primer osi x . V tem primeru je od nič različen samo smerni kosinus $l_x = 1$ in dobimo

$$dx' = dx (1 + u_{xx}).$$

Podobno se spremeni dolžina vektorjev, ki kažejo v smeri osi y ali z ,

$$dy' = dy(1 + u_{yy}), \quad dz' = dz(1 + u_{zz}).$$

Prostornina po deformaciji je

$$dV' = dx' dy' dz' = dx dy dz (1 + u_{xx})(1 + u_{yy})(1 + u_{zz}).$$

Obdržimo le člene, ki so linearni v deformaciji, in dobimo

$$dV' = dV(1 + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = dV(1 + \text{Tr } \mathbf{u}).$$

Relativna sprememba prostornine je torej

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \text{Tr } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

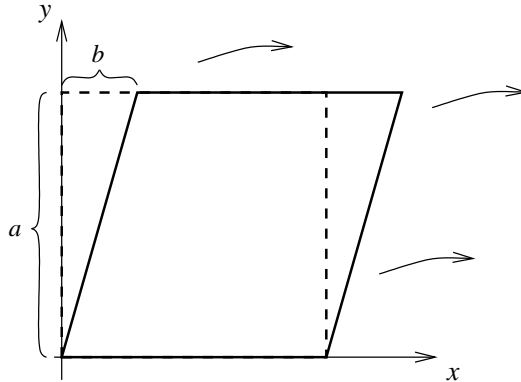
V najnižjem redu je relativna sprememba prostornine enaka sledi deformacijskega tenzorja, ki jo lahko zapišemo tudi kot divergenco vektorja deformacije.

Naloga

Izračunajmo spremembo prostornine kocke, ki jo strižno deformiramo v smeri x , tako kot kaže slika,

$$\mathbf{u} = (u_x, 0, 0), \quad u_x = \frac{b}{a} y = \alpha y.$$

Zapišimo deformacijski tenzor (1.67):



Slika 2.2: Prečna deformacije kocke s stranico a .

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Lokalna relativna sprememba prostornine je po enačbi (2.10) enaka sledi tenzorja u , ki je nič. Ker je deformacijski tenzor od kraja neodvisen, velja to tudi za celo kocko. Pri strižni deformaciji se prostornina ne spremeni, kar se vidi tudi s slike.

Oglejmo si še nekaj. Vemo, da lahko vsako deformacijo lokalno zapišemo kot čiste raztege ali stiske v medseboj pravokotnih smereh,

$$u' = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix},$$

saj je deformacijski tenzor simetričen in ga lahko diagonaliziramo v ortogonalni bazi. Poglejmo, kako lahko razstavimo našo strižno deformacijo. V ta namen moramo u zasukati v lastni sistem: poiščimo lastne vektorje in pripadajoče lastne vrednosti matrike u :

$$(u - \lambda I) a = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(u - \lambda I) = 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \left[\lambda^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] = 0.$$

Zgornja enačba ima tri rešitve, $\lambda = \pm \frac{\alpha}{2}$, 0. Poiščimo še pripadajoče lastne vektorje:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\alpha}{2}, & \mathbf{a}_1 &= (1, 1, 0), \\ \lambda_2 &= -\frac{\alpha}{2}, & \mathbf{a}_2 &= (1, -1, 0), \\ \lambda_3 &= 0, & \mathbf{a}_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

V lastnem sistemu je deformacijski tenzor torej

$$u' = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deformacijo smo tako razstavili na razteg v smeri \mathbf{a}_1 in na stisk v smeri vektorja \mathbf{a}_2 . V smeri vektorja \mathbf{a}_3 se telo ne deformira, $\lambda_3 = 0$. Povečanje prostornine pri raztegu v smeri \mathbf{a}_1 je enako zmanjšanju prostornine pri stisku v smeri \mathbf{a}_2 .

Naloga

Napetostni tenzor ima naslednje komponente:

$$p_{ik} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \text{ N/cm}^2 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Poiščimo ploskev, na kateri je strižna napetost maksimalna.

Ploskev, ki jo iščemo, bomo opisali z normalo \mathbf{n} . Silo na enoto površine $\tilde{\mathbf{F}}$, ki deluje na ploskev, dobimo kot

$$\tilde{F}_i = p_{ik}n_k.$$

Silo bomo razdelili na dve komponenti. Komponento v smeri normale bomo poimenovali *normalna napetost* in jo označili z \mathbf{N} , tisto, ki je vzporedna ploskvi, pa *strižna napetost* ter jo označili z \mathbf{S} . Normalna komponenta je seveda

$$N_i = \tilde{F}_j n_j n_i = p_{jk}n_k n_j n_i,$$

strižno pa dobimo tako, da od $\tilde{\mathbf{F}}$ odštejemo normalno komponento, kar se elegantno zapiše kot

$$S_i = \tilde{F}_j (\delta_{ij} - n_i n_j) = p_{jk}n_k (\delta_{ij} - n_i n_j) = p_{ik}n_k - p_{jk}n_j n_k n_i.$$

Torej je

$$\begin{aligned} S^2 = S_i S_i &= p_{ik}n_k p_{il}n_l - 2p_{ik}n_k p_{jl}n_j n_l n_i + (p_{jk}n_j n_k)^2 = \\ &= p_{ik}n_k p_{il}n_l - (p_{ik}n_i n_k)^2, \end{aligned}$$

kar lahko s posplošitvijo sumacijskega dogovora še krajše zapišemo kot

$$S^2 = (p_{ik}n_k)^2 - (p_{ik}n_i n_k).$$

Zapišimo posamezne člene zgornje enačbe. Upoštevali bomo, da so od nič različni samo diagonalni členi napetostnega tenzorja (enačba (2.12)). Sledi

$$p_{ik}n_k = (p_1 n_1, p_2 n_2, p_3 n_3) \implies \begin{aligned} (p_{ik}n_k)^2 &= p_1^2 n_1^2 + p_2^2 n_2^2 + p_3^2 n_3^2, \\ p_{ik}n_i n_k &= p_1 n_1^2 + p_2 n_2^2 + p_3 n_3^2. \end{aligned}$$

Strižna napetost je torej takole odvisna od komponent napetostnega tenzorja:

$$S^2 = p_1^2 n_1^2 + p_2^2 n_2^2 + p_3^2 n_3^2 - (p_1 n_1^2 + p_2 n_2^2 + p_3 n_3^2)^2. \quad (2.13)$$

Če upoštevamo še to, da je \mathbf{n} enotski vektor, se lahko v (2.13) znebimo ene komponente, recimo n_3 :

$$\begin{aligned} S^2 &= (p_1^2 - p_3^2)n_1^2 + (p_2^2 - p_3^2)n_2^2 + p_3^2 - \\ &\quad - ((p_1 - p_3)n_1^2 + (p_2 - p_3)n_2^2 + p_3)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Za ekstrem velikosti strižne napetosti mora veljati

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dS^2}{dn_1} &= 2(p_1^2 - p_3^2)n_1 - \\ &\quad - 4((p_1 - p_3)n_1^2 + (p_2 - p_3)n_2^2 + p_3)(p_1 - p_3)n_1, \\ 0 = \frac{dS^2}{dn_2} &= 2(p_2^2 - p_3^2)n_2 - \\ &\quad - 4((p_1 - p_3)n_1^2 + (p_2 - p_3)n_2^2 + p_3)(p_2 - p_3)n_2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

V našem primeru so p_1 , p_2 in p_3 neničelni in medseboj različni. Iz zgornjih enačb zato sledi

$$\begin{cases} (p_1 - p_3) - 2[(p_1 - p_3)n_1^2 + (p_2 - p_3)n_2^2] \} n_1 = 0, \\ (p_2 - p_3) - 2[(p_1 - p_3)n_1^2 + (p_2 - p_3)n_2^2] \} n_2 = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Rešitev $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ in torej $n_3 = 1$ ni dobra, ker ustreza površini, na kateri ni strižnih napetosti (minimum). Iz enačbe (2.13) namreč sledi $S = 0$. Preostale rešitve enačbe (2.16) bomo razdelili v tri skupine:

1. $n_1 \neq 0$, $n_2 = 0$. Iz enačb (2.16) sledi

$$(p_1 - p_3)(1 - 2n_1^2) = 0 \implies n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_2 = 0 \text{ in } n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. $n_1 = 0$, $n_2 \neq 0$. Enačbi (2.16) nam dasta

$$(p_2 - p_3)(1 - 2n_2^2) = 0 \implies n_1 = 0, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ in } n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$. Enačbi (2.16) sta izpolnjeni, ko je $p_1 = p_2 = p_3$, kar pa v našem primeru ne velja. Videti je, da rešitev z $n_1 \neq 0$ in $n_2 \neq 0$ ne obstaja. Vendar to ni res; pri prehodu iz enačbe (2.13) v enačbo (2.14) smo namreč n_3 izrazili z n_1 in n_2 . Če izločimo na primer n_2 tako, da ga izrazimo z n_1 in n_3 , dobimo še eno rešitev:

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ in } n_3 = 0.$$

Ploskve, na katerih je strižna napetost največja, oklepajo torej druga z drugo kot 45° . Izračunajmo še vrednosti S na dobljenih ploskvah:

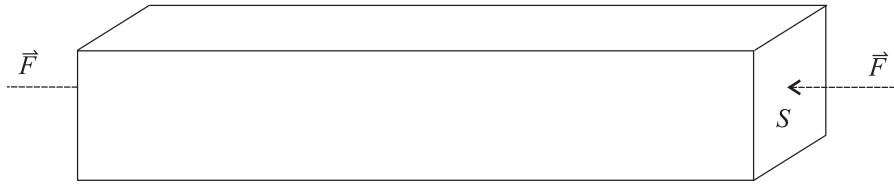
$$\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{1}{4}(p_1 - p_3)^2 \implies S = \frac{1}{2}|p_1 - p_3| = \frac{25}{2} \text{ N/cm}^2, \\ S_2^2 &= \frac{1}{4}(p_2 - p_3)^2 \implies S = \frac{1}{2}|p_2 - p_3| = \frac{125}{2} \text{ N/cm}^2, \\ S_3^2 &= \frac{1}{4}(p_1 - p_2)^2 \implies S = \frac{1}{2}|p_1 - p_2| = 50 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Omenimo še to, da imenujemo ploskev, na kateri je strižna napetost najmanjša in zato N največja, glavna ploskev. Normalo ene od glavnih ploskev smo že izračunali, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, preostali dve pa opisujeta normalni $(1, 0, 0)$ in $(0, 1, 0)$.

Naloga

Palico preseka S stisnemo po dolžini s silo F . Izračunajmo spremembo njene prostornine!

Palica naj leži vzdolž osi z , tako da so robovi vzporedni koordinatnim osem. Poglejmo robne pogoje: na presečni ploskvi deluje sila F v smeri z , na stranske ploskve pa ne deluje

Slika 2.3: Palico s presekom S stisnemo v vzdolžni smeri.

nobena sila. To prevedemo na robni pogoj za napetostni tenzor. Na presečnih ploskvah velja $p_{zz} = -F/S$, $p_{zx} = p_{zy} = 0$, na stranskih z normalo v smeri x velja $p_{xi} = 0$, na onih z normalo v y smeri pa $p_{yi} = 0$ za vse i . Predznak minus dobimo, ker sila kaže v nasprotno smer kot normala ploskve. Ponuja se rešitev, ki zadošča ravnovesnemu (Cauchyjevemu) pogoju (2.3),

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

in sicer takšna, kjer povsod velja $p_{zz} = -F/S$, vse ostale komponente napetostnega tenzorja pa so 0. To je tudi edina rešitev. Rešitev Navierove enačbe (2.5) je namreč enolična in popolnoma določena z robnimi pogoji.

Deformacijo bomo izračunali iz Hookovega zakona. Lahko bi ga uporabili kar v obliki (2.1), a dajmo za vajo izraziti deformacijski tenzor u z napetostnim p (enačba (2.2)). V prvem koraku povežimo sledi p_{kk} in u_{kk} , kar naredimo tako, da pogledamo sled Hookovega zakona (2.1):

$$p_{kk} = 2\mu u_{kk} + 3\lambda u_{kk} = (2\mu + 3\lambda)u_{kk}, \quad (2.17)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\delta_{kk} = 3$, nato pa lahko izrazimo u_{ik} s p_{ik} :

$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu} p_{ik} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} p_{ll} \delta_{ik}. \quad (2.18)$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{aligned} u_{xx} = u_{yy} &= -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} p_{zz}, \\ u_{zz} &= \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \right) p_{zz} = \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} p_{zz}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

izvendiagonalne komponente deformacijskega tenzorja pa so 0. Ni nujno, da gre za palico s kvadratnim presekom. Vidimo, da enak rezultat dobimo za prizmo s kakršnimkoli presekom.

Vemo (enačba (2.10)), da je relativna lokalna sprememba prostornine telesa enaka sledi deformacijskega tenzorja, v tem primeru torej

$$\frac{\Delta V}{V} \approx u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{F/S}{2\mu + 3\lambda}. \quad (2.20)$$

Vpeljimo Poissonovo razmerje σ kot negativno razmerje prečnih in vzdolžne komponente deformacijskega tenzorja:

$$\sigma = -\frac{u_{xx}}{u_{zz}} = -\frac{u_{yy}}{u_{zz}} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}p_{zz}}{\frac{2\mu+2\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}p_{zz}} = \frac{\lambda}{2\mu+2\lambda}. \quad (2.21)$$

Namesto snovnih konstant λ in μ sta pogosto v rabi Poissonovo razmerje σ ter Youngov modul E ,

$$E = \frac{p_{zz}}{u_{zz}} = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}. \quad (2.22)$$

Če v enačbi (2.20) izrazimo μ in λ z E in σ , zapišemo spremembo prostornine palice kot

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p_{zz}(1-2\sigma)}{E} = -\frac{F(1-2\sigma)}{ES}. \quad (2.23)$$

Če bi bil $\sigma = \frac{1}{2}$ (za primerjavo povejmo, da je σ za železo enak $\frac{1}{3}$ in za jeklo $\frac{1}{5}$), se njena prostornina pri vzdolžni obremenitvi ne bi spremenila. Iz enačbe (2.23) razberemo tudi, da Poissonovo razmerje σ ne more biti večje od $\frac{1}{2}$, sicer bi se pri stisku palice njena prostornina povečala.

Naloga

Palico preseka S stisnemo po dolžini s silo F . S kakšnim tlakom jo moramo obremeniti po plašču, da se njena prostornina ne bo spremenila?

Robni pogoj na stranskih ploskvah se zdaj spremeni, tako da na ploskvah z normalo v x smeri velja $p_{xx} = -p$, $p_{yx} = p_{zx} = 0$, na ploskvah z normalo v y smeri pa $p_{yy} = -p$, $p_{xy} = p_{zy} = 0$. Rešitev je spet konstanten napetostni tenzor $p_{xx} = p_{yy} = -p$, $p_{zz} = -F/S$, $p_{ij} = 0$ za $i \neq j$, saj zadošča ravnovesnemu pogoju (2.3) in vsem robnim pogojem. To spet velja tudi, če presek ni pravokoten, ampak poljuben (pokaži). Za pravokotni presek pa dodatno velja, da je konstantni diagonalni napetostni tenzor rešitev tudi, ko sta tlaka na stranski ploskvi različna.

Iz Hookovega zakona (2.2) tokrat dobimo

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{2\mu}p_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}), \\ u_{yy} &= \frac{1}{2\mu}p_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}), \\ u_{zz} &= \frac{1}{2\mu}p_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \end{aligned}$$

Sprememba prostornine je tako

$$\frac{\Delta V}{V} = u_{kk} = \frac{1}{2\mu+3\lambda}p_{kk} = \frac{(1-2\sigma)}{E}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \quad (2.24)$$

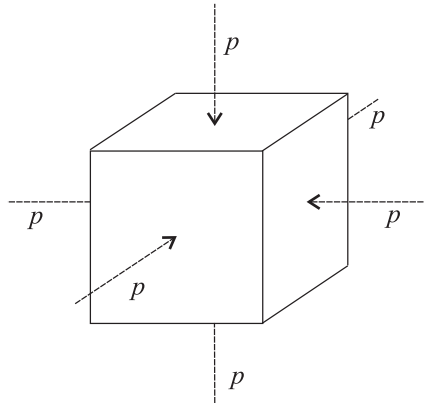
in je ničelna, če velja

$$p = p_{zz}/2 = -F/2S. \quad (2.25)$$

Plašč je torej treba obremeniti z negativnim tlakom, $p = -F/2S$.

Naloga

Telo v obliki kocke potopimo v tekočino s tlakom p . Za koliko se pri tem spremeni prostornina kocke?



Slika 2.4: Kocko potopimo v tekočino s tlakom p .

Začnimo z robnimi pogoji. Na ploskvah, vzporednih z ravnino yz , velja pogoj $p_{xx} = -p$, na ostalih dveh parih vzporednih ploskev pa $p_{yy} = -p$ oziroma $p_{zz} = -p$. Rešitev, ki zadošča robnim pogojem in ravnovesnemu pogoju (2.3), je $p_{ij} = -p \delta_{ij} = \text{const}$. Predznak minus pomeni, da so smeri sil, ki delujejo na ploskve, nasprotno smerem normal ploskev.

Deformacijski tenzor izrazimo z napetostnim po Hookovem zakonu (2.1). Ker nas zanima le sprememba prostornine, lahko elegantno vzamemo sled enačbe (2.18), ki je zapisana že v enačbi (2.17) in imamo opravka le s skalarno enačbo:

$$u_{kk} = \frac{p_{kk}}{2\mu + 3\lambda} = \frac{-3p}{2\mu + 3\lambda}.$$

Relativna sprememba prostornine kocke, ki je po (2.10) enaka sledi deformacijskega tenzorja, je zato

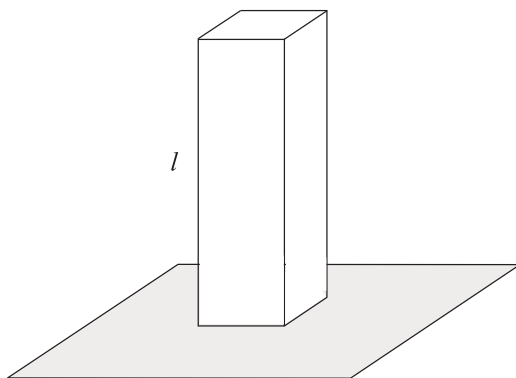
$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3}{2\mu + 3\lambda}p = -\frac{3(1 - 2\sigma)}{E}p, \quad (2.26)$$

kar dobimo tudi iz enačbe (2.24), če upoštevamo $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$. Poudariti je treba, da rešitev (2.26) velja za telo kakršnekoli oblike, saj zadošča robnemu pogoju ne glede na to, kako se s krajem spreminja normala površine (pokažite).

Pri enakem tlaku kot v primeru enoosnega stiskanja palice je sprememba prostornine trikrat večja (glej enačbo (2.23)). Spomnimo se še na to, da ponavadi označimo sorazmernostni faktor med relativno spremembo prostornine in tlakom, ki jo povzroči, s koeficientom stisljivosti χ_T , $\frac{\Delta V}{V} = -\chi_T p$. Iz enačbe (2.26) potem sledi $\chi_T = \frac{3}{2\mu+3\lambda} = \frac{3(1-2\sigma)}{E}$.

Naloga

Pokončen kvader višine l stoji na ravni podlagi. Kako se deformira pod vplivom lastne teže?



Slika 2.5: Deformacija kvadra pod vplivom lastne teže.

Za vsak prostorninski element kvadra zapišemo ravnovesno enačbo (2.3):

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad (2.27)$$

kjer je f_i prostorninska gostota sile, v našem primeru teže. Zanja velja $\mathbf{f} = -\rho g(0, 0, 1)$. Robni pogoji so naslednji. Na zgornjo in stranske ploskve ni sil, zato tam velja, za vsak i , $p_{zi} = 0$ za zgornjo in $p_{xi} = 0$ oziroma $p_{yi} = 0$ za stranske ploskvi. Na spodnji ploskvi pa velja $u_z = 0$ in, če predpostavimo, da ni trenja, še $p_{zx} = p_{zy} = 0$. Rešitev enačbe (2.27) bomo iskali v približku, da povsod velja $p_{xz} = p_{xy} = p_{yz} = p_{xx} = p_{yy} = 0$ in je le p_{zz} različen od nič. Podobno predpostavko smo uporabili že pri prejšnjih dveh nalogah, a tam smo se hitro prepričali, da res velja. Kot se bo izkazalo v nadaljevanju, se tokrat ob naši predpostavki ne bo dalo zadostiti robnemu pogoju na spodnji ploskvi. Poglejmo.

Enačba (2.27) se ob naši predpostavki poenostavi v $\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \rho g$. Ko jo integriramo po z , dobimo

$$p_{zz} = \rho g z + c. \quad (2.28)$$

Robni pogoj na zgornji ploskvi zahteva $p_{zz}|_{z=l} = 0$, s čimer določimo konstanto c ,

$$p_{zz} = \rho g(z - l). \quad (2.29)$$

Da bi določili deformacijo kvadra, povežimo najprej deformacijski in napetostni tenzor s Hookovim zakonom

$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu} p_{ik} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} p_{ll} \delta_{ik}. \quad (2.30)$$

Če vstavimo v zgornji izraz enačbo (2.29), dobimo naslednje komponente deformacijskega tenzorja:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= u_{xz} = u_{yz} = 0, \\ u_{xx} &= u_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(z - l), \\ u_{zz} &= \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(z - l). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Zaradi krajšega zapisa uvedemo konstante $c_1 = \frac{\lambda \rho g}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}$, $c_2 = \frac{(\mu + \lambda) \rho g}{\mu(2\mu + 3\lambda)}$ in enačbe integriramo:

$$\begin{aligned} u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -c_1(z - l) &\implies u_x = -c_1(z - l)x + f(y, z), \\ u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -c_1(z - l) &\implies u_y = -c_1(z - l)y + g(x, z), \\ u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = c_2(z - l) &\implies u_z = c_2 \left(\frac{1}{2}z^2 - lz \right) + h(x, y). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Funkcije f , g in h bomo določili iz preostalih enačb (2.31), $u_{xy} = u_{xz} = u_{yx} = 0$. Zveza $u_{xy} = 0$ (torej $\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$) poveže funkciji f in g :

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = 0. \quad (2.33)$$

Iz enačb $u_{xz} = u_{yz} = 0$ pa sledi:

$$\begin{aligned} -c_1x + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ -c_1y + \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Če prvo enačbo odvajamo po x in drugo po y ter upoštevamo, da f ni odvisen od x , g pa ne od y , dobimo enakosti

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = c_1, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = c_1.$$

Da bi določili funkcijo $h(x, y)$, bomo v naslednjem koraku zgornji enačbi integrirali, prvo po x in drugo po y . Sledi

$$\frac{\partial h}{\partial x} = c_1x + m(y), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = c_1y + n(x). \quad (2.35)$$

Ker morata biti odvoda $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial m(y)}{\partial y}$ in $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial n(x)}{\partial x}$ med seboj enaka, pri čemer je prvi odvisen samo od y , drugi pa samo od x , je edino mogoče, da sta enaka konstanti. Označimo jo s k . Za funkciji $m(y)$ in $n(x)$ potem velja $m(y) = ky + a$ ter $n(x) = kx + b$. Če integriramo izraza (2.35) še enkrat po x oziroma y in ju izenačimo, dobimo za funkcijo $h(x, y)$ izraz

$$h(x, y) = \frac{1}{2}c_1(x^2 + y^2) + kxy + ax + by + d. \quad (2.36)$$

Konstante a, b, d, k bomo določili iz robnih pogojev.

Poiščimo še funkciji f in g . Iz prve izmed enačb (2.34) sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{\partial h}{\partial x} + c_1x = -ky - a, \\ f &= -kyz - az + m_1(y). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Druga enačba (2.34) pa nam da

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z} &= -\frac{\partial h}{\partial y} + c_1x = -kx - b, \\ g &= -kxz - bz + n_1(x). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Funkciji $m_1(y)$ in $n_1(x)$ bomo določili iz enačbe (2.33). Če odvajamo f po y in g po x , dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = -kz + \frac{\partial m_1(y)}{y} - kz + \frac{\partial n_1(x)}{x} = 0.$$

Sledi enačba $2kz = \frac{\partial m_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial n_1(x)}{\partial x}$, ki je rešljiva samo tedaj, ko je $k = 0$ ter $\frac{\partial m_1(y)}{\partial y} = \frac{\partial n_1(x)}{\partial x} = -e$. Za funkciji f in g potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned} f(y, z) &= -az + ey + a_1, \\ g(x, z) &= -bz - ex + b_1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Vektor deformacije (2.32) ima tedaj naslednje komponente:

$$\begin{aligned} u_x &= -c_1(z - l)x - az + ey + a_1, \\ u_y &= -c_1(z - l)y - bz - ex + b_1, \\ u_z &= c_2 \left(\frac{1}{2}z^2 - zl \right) + \frac{1}{2}c_1(x^2 + y^2) + ax + by + d. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Preostane le še, da določimo konstante a, b, d, e in a_1 ter b_1 . Konstanti a_1 in b_1 takoj postavimo na nič, saj pomenita premik celotnega kvadra v smeri osi x in y . Opazimo, da ne moremo zadostiti robnemu pogoju $u_z(x, y, l) = 0$, kar pomeni, da začetna predpostavka o napetostnem tenzorju ni prava. Kljub temu pojdimo naprej in poiščimo rešitev, ki pač ne zadošča zahtevanemu robnemu pogoju na spodnji ploskvi. Namesto tega zahtevajmo, da na vrhu kvadra velja $u_x(x, y, l) = u_y(x, y, l) = 0$, za kar sicer nimamo argumentov, se pa zdi

blizu realnosti. Če ta pogoja vstavimo v enačbo (2.40), sledi, da je $a = b = e = 0$. Vektor deformacije ima zato naslednjo prostorsko odvisnost:

$$\begin{aligned} u_x &= -c_1(z-l)x, \\ u_y &= -c_1(z-l)y, \\ u_z &= c_2\left(\frac{1}{2}z^2 - zl\right) + \frac{1}{2}c_1(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Konstanti c_1 in c_2 imata vrednosti $c_1 = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\rho g$ in $c_2 = \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)}\rho g$.

Naloga

Navpično postavljeno palico dolžine h iz snovi z gostoto ρ vstavimo v natančno prilegajočo se izvrtino, tako da se palica ne more prečno raztezati. Kolikšna je največja možna napetost, s katero palica zaradi lastne teže pritiska na dno izvrtine? Kako visoka je lahko palica, da sila na dno ne preseže 90 % maksimalne sile? Koefficient lepenja med palico in steno je k_l . (Analogen problem v fiziki sipkih snovi je problema silosa oz. Janssenov problem.)

Os z usmerimo navzgor vzdolž palice. Na robu palice velja $u_x = u_y = 0$. Predpostavimo, da to velja tudi znotraj palice. Nadalje predpostavimo, da je napetost v palici odvisna le od z . Iz Hookovega zakona sledi

$$p_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}, \quad (2.42)$$

$$p_{xx} = p_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz} = \frac{\sigma}{1-\sigma}p_{zz}. \quad (2.43)$$

Zapišimo ravnovesni pogoj za delček palice z dolžino dz . V smeri z nanj deluje teža, sili sosednjih delčkov in sila lepenja.

$$-\rho g S_0 dz + S_0 dp_{zz} - k_l \frac{\sigma}{1-\sigma} p_{zz} l_0 dz = 0, \quad (2.44)$$

kjer je S_0 ploščina preseka palice, l_0 pa njegov obseg. Zaradi $p_{xx} = p_{yy}$ zapisana sila lepenja velja tudi za nekrožne preseke. Opazimo, da vse začetne predpostavke ne morejo držati. Zaradi sile lepenja na robu je $p_{zx} = p_{zy} \neq 0$ in odtod po Hookovem zakonu $u_{zx} = u_{zy} \neq 0$. Če obdržimo predpostavko, da povsod velja $u_x = u_y = 0$, potem mora biti $u_z = u_z(x, y)$ in po Hookovem zakonu torej $p_{zz} = p_{zz}(x, y)$. To pomeni, da ravnovesnega pogoja načeloma ne moremo zapisati v obliki (2.44). Vendar sklepamo, da se pri tankih palicah p_{zz} od sredine do roba le malo spremeni, tako da enačba (2.44) vendarle velja. Na koncu bomo pogledali, kdaj je res tako.

Enačbo (2.44) delimo z S_0 in dz in dobimo

$$\frac{dp_{zz}}{dz} - k_l \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{l_0}{S_0} p_{zz} - \rho g = 0 \quad (2.45)$$

z rešitvijo

$$p_{zz}(z) = Ae^{z/\lambda_J} - \rho g \lambda_J,$$

kjer je λ_J Janssenova dolžina

$$\lambda_J = \frac{1 - \sigma}{k_l \sigma} \frac{S_0}{l_0}, \quad (2.46)$$

za krožni presek z radijem R torej $\lambda_J = R(1 - \sigma)/2k_l\sigma$. Na vrhu palice velja $p_{zz}(h) = 0$, odkoder določimo konstanto A , tako da imamo rešitev

$$p_{zz}(z) = -\rho g \lambda_J \left[1 - e^{-(h-z)/\lambda_J} \right]. \quad (2.47)$$

Četudi je palica zelo dolga, vidimo, da $-p_{zz}$ ne more preseči vrednosti $\rho g \lambda_J$, kar je torej največji možni tlak na dno. Poglejmo še, pri kateri dolžini h je tlak na dno 90 % maksimalnega:

$$0.9 = 1 - e^{-h/\lambda_J}, \quad h = \lambda_J \ln 10 = 2.30 \lambda_J.$$

Poglejmo, kakšno napako smo naredili, s tem ko smo predpostavili, da se p_{zz} po preseku ne spreminja. Primerjati moramo variacijo napetosti po preseku Δp_{zz} in napetost p_{zz} , pri čemer mora biti relativna variacija seveda majhna:

$$\left| \frac{\Delta p_{zz}}{p_{zz}} \right| = \left| \frac{1}{p_{zz}} \frac{\partial p_{zz}}{\partial x} R \right| \ll 1,$$

kjer je R radij palice. Δp_{zz} ocenimo takole. Iz (2.42) znamo povezati $\partial p_{zz}/\partial x$ in $\partial u_{zz}/\partial x$. Če upoštevamo, da je $u_x = 0$, sledi

$$\frac{\partial u_{zz}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_{zx}}{\partial z}.$$

Odtod s Hookovim zakonom (2.7)

$$\frac{\partial u_{zx}}{\partial z} = \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = k_l \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} = k_l \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.$$

V drugem koraku smo upoštevali zvezo med normalno silo in silo lepenja na robu, nazadnje pa še enačbo (2.43). Ko vse združimo, imamo

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial x} = k_l \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.$$

Značilni odvod po z je $(\partial p_{zz}/\partial z) \sim p_{zz}/\lambda_J$, tako da končno ocenimo

$$\left| \frac{\Delta p_{zz}}{p_{zz}} \right| = \left| \frac{1}{p_{zz}} \frac{\partial p_{zz}}{\partial x} R \right| \sim k_l \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \frac{R}{\lambda_J} = 2 \frac{(k_l \sigma)^2}{(1 - \sigma)(1 - 2\sigma)}.$$

Vidimo, da veljavnost naše predpostavke sploh ni odvisna od debeline palice, kakor smo predvidevali, ampak le od koeficienta lepenja in Poissonovega razmerja. Tipične vrednosti razmerja $\left| \frac{\Delta p_{zz}}{p_{zz}} \right|$ za betonsko, bakreno in aluminijasto palico v jekleni izvrtini so 0.01, 0.15 oziroma 0.3, za gumijasto palico v jekleni izvrtini pa je vrednost zelo velika ($\sigma \rightarrow 1/2$). Ključno pri tem je Poissonovo razmerje – čim bliže je vrednosti 1/2, tem močnejša je prečna odvisnost.

Naloga

Homogen valj z radijem R se vrti okoli lastne geometrijske osi s konstantno kotno hitrostjo ω . Poiščimo komponente vektorja deformacije, če zanemarimo težo! Privzemimo, da vzdolž osi valja ni deformacije, ter preverimo, ali je privzetek smiseln.



Slika 2.6: Valj se vrti okoli geometrijske osi.

Rešitev bomo poiskali z Navierovo enačbo (2.5). Na vsak delček valja deluje centrifugalna sila v smeri radialno navzven. Gostota sile je zato $\mathbf{f} = \rho\omega^2 r \hat{\mathbf{e}}_r$. Ker je valj dolg, predpostavimo, da vektor premika kaže v radialni smeri in je odvisen le od radija, $\mathbf{u} = u_r(r) \hat{\mathbf{e}}_r$. Če ob tej predpostavki najdemo rešitev Navierove enačbe, ki ustreza robnim pogojem, sta predpostavka in s tem rešitev pravilni. Rešitev Navierove enačbe je namreč enolična in popolnoma določena z robnimi pogoji.

Zapišimo Navierovo enačbo (2.8) v obliki

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} = 0, \quad (2.48)$$

kjer smo upoštevali vektorsko identiteto $\nabla \nabla \cdot = \nabla^2 + \nabla \times \nabla \times$. Če zapišemo rotor vektorja deformacije v cilindričnih koordinatah,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.49)$$

ugotovimo, da je ob naši predpostavki le-ta nič. Navierova enačba se poenostavi v

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\omega^2 r \hat{\mathbf{e}}_r = 0. \quad (2.50)$$

Gradient v cilindričnih koordinatah zapišemo kot

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial f}{r \partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.51)$$

divergenco pa kot

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.52)$$

Enačba (2.50) je s tem

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right) = -\rho\omega^2 r. \quad (2.53)$$

Integracija po r prinese izraz

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -\alpha \frac{r^2}{2} + A, \quad \alpha = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \rho\omega^2,$$

kjer je A konstanta, ki jo bomo določili kasneje. Po množenju z r in ponovni integraciji dobimo

$$u_r = -\alpha \frac{r^3}{8} + A \frac{r}{2} + B \frac{1}{r}. \quad (2.54)$$

Konstanta B je enaka nič, sicer bi bila deformacija v izhodišču neskončna. Konstanto A določimo iz robnega pogoja. Vemo namreč, da je napetost na površini valja enaka nič, ker nanjo ne deluje nobena površinska sila, torej $(p_{rr})|_{r=R} = 0$. Iz Hookovega zakona (2.6), ki ga lahko zapišemo v obliki

$$p_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left[u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right],$$

definicije $u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, enačbe (2.52) in rešitve (2.54) dobimo

$$p_{rr} = \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left(-\frac{3-2\sigma}{4} \alpha r^2 + A \right) \quad (2.55)$$

in odtod

$$A = \frac{3-2\sigma}{4} \alpha R^2.$$

Rešitev je tako

$$u_r(r) = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} \rho\omega^2 [-r^3 + (3-2\sigma)R^2 r]. \quad (2.56)$$

Poglejmo še, kakšen je napetostni tenzor. Poleg komponente p_{rr} , en. (2.55), sta neničelni še

$$p_{\phi\phi} = \frac{E}{1+\sigma} \left[\frac{u_r}{r} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right]$$

in

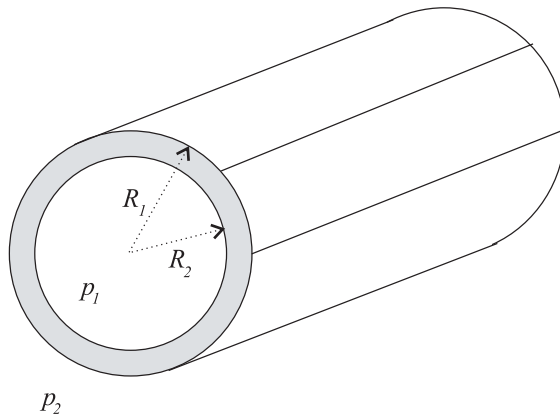
$$p_{zz} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r}.$$

Vidimo, da je p_{zz} neničeln in celo odvisen od r . To je prava rešitev za valj, katerega osnovni ploskvi sta vpeti tako, da se ne more raztezati oz. krčiti v vzdolžni smeri. V tem primeru naša

rešitev namreč zadošča robnemu pogoju $u_z = 0$ na koncih valja, za neničeln p_{zz} pa poskrbi vpetje. Drugače je, če je valj prost: na koncih mora veljati $p_{zi} = 0$, čemur pa naša rešitev, kot smo pokazali, ne zadošča. Tudi s privzetkom $\mathbf{u} = u_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + u_z(z)\hat{\mathbf{e}}_z$ v tem primeru ne bo šlo, saj ob zahtevi $p_{zz} = 0$ iz Hookovega zakona sledi, da je u_z odvisen tudi od r . Rešitev za prosti valj je torej dvodimenzionalna, $\mathbf{u} = u_r(r, z)\hat{\mathbf{e}}_r + u_z(r, z)\hat{\mathbf{e}}_z$.

Naloga

Presek dolge cevi opisujeta koncentrična kroga z radijema R_1 in R_2 , $R_1 < R_2$. Določi deformacijo cevi, če povečamo tlak v notranjosti cevi s $p \approx 0$ na p_1 , tlak v okolici pa na p_2 . vzdolž cevi naj ne bo deformacije.



Slika 2.7: Deformacija cevi zaradi nadtlaka v notranjosti.

Vektor deformacije $\mathbf{u} = u_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r$. Zapišimo ravnovesno enačbo v obliki (2.48) in upoštevajmo, da je gostota sile enaka nič:

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \right] = 0.$$

Spet velja, da je $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, torej se enačba poenostavi v $\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} \right] = 0.$$

Kot v prejšnji nalogi dvakrat integriramo in dobimo

$$u_r = \frac{1}{2} A r + \frac{B}{r}, \quad (2.57)$$

kjer sta A in B integracijski konstanti, ki ju bomo določili iz robnih pogojev $p_{rr}|_{R_1} = -p_1$

in $p_{rr}|_{R_2} = -p_2$. Kot v prejšnji nalogi je

$$p_{rr} = \frac{E}{1+\sigma} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right],$$

kar da enačbi

$$-p_i(1+\sigma)/E = \left(1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right) \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{R_i^2}\right) + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{R_i^2}\right)$$

za $i = 1, 2$. Odtod

$$A = \frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E} \left[\frac{p_2 - p_1}{1 - (R_2/R_1)^2} - p_2 \right],$$

$$B = \frac{1+\sigma}{E} \frac{p_1 - p_2}{1/R_1^2 - 1/R_2^2}$$

in rešitev (2.57).

Naloga

Jeklena cev s polmerom $R_1 = 2.5$ cm je obdana s 5-centimetrskim plaščem ($R_2 = 7.5$ cm) izolacije iz umetne mase. Plašč želimo zasukati okrog cevi: najprej ga primemo, t.j. v radialni smeri enakomerno stisnemo s tlakom $p_0 = 10^6$ Pa, nato pa počasi zasučemo. Izračunajmo, za kolikšen kot je treba zavrteti zunanji del plašča, da izolacija zdrsne okrog cevi. Vzdolž simetrijske osi ni deformacije. Youngov modul umetne mase je $E = 10^7$ Pa, Poissonovo število $\sigma = 0.4$, koeficient lepenja med jeklom in umetno maso pa $k = 0.8$. Deformacija cevi je zanemarljiva.

Tulec izolacije se deformira v radialni in tangentialni smeri, premik pa je zaradi simetrije odvisen le od radija: $\mathbf{u} = u_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + u_\phi(r)\hat{\mathbf{e}}_\phi$. Zapišimo ravnovesno enačbo v obliki (2.48):

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \right] = 0.$$

Tokrat sta tako divergenca kot rotor odmika neničelna. Če vektor deformacije razdelimo na radialni in tangentialni del, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, kjer sta $\mathbf{u}_1 = u_r\hat{\mathbf{e}}_r$ in $\mathbf{u}_2 = u_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi$, opazimo (enačbi (2.49) in (2.52)), da velja $\nabla \times \mathbf{u}_1 = 0$ in $\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0$:

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_2 \right] = 0.$$

Prvi člen je vzporeden $\hat{\mathbf{e}}_r$, drugi pa kaže v smer $\hat{\mathbf{e}}_\phi$, torej lahko napišemo ločeni enačbi:

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.58)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0. \quad (2.59)$$

Rešitev prve enačbe,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right] = 0,$$

je (enačba (2.57))

$$u_r = \frac{1}{2}Ar + \frac{B}{r}.$$

Razpišemo še enačbo (2.59) in spet dobimo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\phi)}{\partial r} \right] = 0$$

z rešitvijo

$$u_\phi = \frac{1}{2}Cr + \frac{D}{r}.$$

Konstante A , B , C in D določimo iz robnih pogojev. Na notranji strani tulca mora veljati $u_r|_{r=R_1} = 0$, saj se cev ne deformira, in $u_\phi|_{r=R_1} = 0$, ker nas zanima mejni primer, tik preden izolacija zdrsne. Na zunanji strani velja $p_{rr}|_{r=R_2} = -p_0$. Na notranji strani imamo še zvezo med ploskovno porazdeljenima tangento silo lepenja in radialno silo, ki pritiska na cev: $p_{r\phi}|_{r=R_1} = -kp_{rr}|_{r=R_1}$ (predznak je arbitraren in smo ga izbrali tako, da bo tangenta komponenta premika pozitivna). Zapišimo komponenti napetostnega tenzorja, ki ju potrebujemo:

$$\begin{aligned} p_{rr} &= \frac{E}{1+\sigma} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right] = \frac{E}{1+\sigma} \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} A \right), \\ p_{r\phi} &= \frac{E}{1+\sigma} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) = -\frac{E}{1+\sigma} \frac{D}{r^2}. \end{aligned}$$

Za radialni del torej zahtevamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}AR_1 + \frac{B}{R_1}, \\ -p_0 &= \frac{E}{1+\sigma} \left[A \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \right) - \frac{B}{R_2^2} \right] \end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2}AR_1^2, \\ A &= -2p_0 \frac{1+\sigma}{E} \left[\frac{1}{1-2\sigma} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

ter s tem

$$-p_N = p_{rr} \Big|_{r=R_1} = -2p_0 \frac{1-\sigma}{1+(1-2\sigma)(R_1/R_2)^2}. \quad (2.60)$$

Za tangencialni del zahtevamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}CR_1 + \frac{D}{R_1}, \\ kp_N &= -\frac{E}{1+\sigma} \frac{D}{R_1^2} \end{aligned}$$

in končno dobimo rešitev

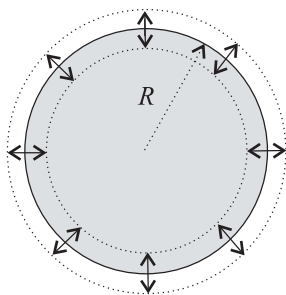
$$u_\phi(r) = kp_N \frac{1+\sigma}{E} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right). \quad (2.61)$$

Izolacija zdrsne, ko zunanji del plašča zavrtimo za kot

$$\frac{u_\phi}{R_2} = kp_N \frac{1+\sigma}{E} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] = 0.117. \quad (2.62)$$

Naloga

Poiščimo frekvence radialnega lastnega nihanja elastične kroglice z radijem R .



Slika 2.8: Lastna nihanja elastične kroglice.

Preselili se bomo v krogelne koordinate in se omejili na tiste rešitve, pri katerih je odmik od ravnovesne lege odvisen samo od oddaljenosti od središča kroglice, $\mathbf{u} = u(r)\hat{\mathbf{e}}_r$. Rotor odmika,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (2.63)$$

je spet nič. Uporabimo gibalno enačbo (2.8) v obliki (2.48) in zavrzimo člen z rotorjem,

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.64)$$

Vstavimo časovni nastavek $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t}$ in dobimo amplitudno enačbo

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + k^2 \mathbf{u}_0 = 0, \quad k^2 = \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{E(1 - \sigma)} \rho \omega^2, \quad (2.65)$$

ki jo smemo, ker je $\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0$, zapisati tudi v obliki

$$\nabla^2 \mathbf{u}_0 + k^2 \mathbf{u}_0 = 0. \quad (2.66)$$

Vendar pozor: morebiti bi kdo na hitro sklepal, da je rešitev sferna Besselova funkcija 0-tega reda $j_0(kr)$, ker gre za krogelno simetrično rešitev. To bi bilo res, če bi imeli opravka z Laplaceom skalarja, mi pa imamo Laplace vektorja. Hitro tudi vidimo, da mora v izhodišču veljati $u_0 = 0$, čemur pa j_0 ne ustreza.

Razpišimo torej operator odvajanja – morda je nekoliko hitreje, če pogledamo enačbo (2.65). Gradient v krogelnih koordinatah zapišemo kot

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.67)$$

divergenco pa kot

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right). \quad (2.68)$$

Amplitudna enačba (2.65) se torej glasi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \left(2r u_0 + r^2 \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \right] + k^2 u_0 = 0,$$

torej

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) u_0 = 0.$$

Primerjava z diferencialno enačbo sfernih Besselovih funkcij,

$$\frac{\partial^2 j_l}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial j_l}{\partial r} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) j_l = 0, \quad (2.69)$$

pokaže, da sta rešitvi naše amplitudne enačbe funkciji $j_1(kr)$ in $n_1(kr)$, od katerih nas zanima le prva, saj druga divergira v izhodišču:

$$u_0 = A j_1(kr). \quad (2.70)$$

Amplituda lastnega nihanja A seveda ni določena, k in s tem lastne frekvence pa dobimo iz robnega pogoja. Na površino kroglice ne deluje nobena sila, torej mora tam veljati $p_{rr}|_{r=R} = 0$:

$$p_{rr} = \frac{E}{1 + \sigma} \left(u_{rr} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \Big|_{r=R} = 0.$$

Vstavimo rešitev (2.70), pri čemer bo ugodno, če odvajamo po argumentu funkcije, torej po kr :

$$\left\{ k \frac{\partial j_1(kr)}{\partial(kr)} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{1}{kr^2} \frac{\partial[(kr)^2 j_1(kr)]}{\partial(kr)} \right\} \Bigg|_{r=R} = 0. \quad (2.71)$$

Uporabili bomo zvezi med sfernimi Besselovimi funkcijami:

$$-x^{-l} z_{l+1} = (x^{-l} z_l)', \quad (2.72)$$

$$x^{l+1} z_{l-1} = (x^{l+1} z_l)', \quad (2.73)$$

kjer je z katerakoli sferna Besselova funkcija, pri nas torej j . S prvo zvezo izrazimo j_1 z elementarnimi funkcijami, saj vemo, da je $j_0(x) = \sin x/x$:

$$j_1(x) = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2},$$

z drugo zvezo pa v drugem členu (2.71) prepoznamo $j_0(kr)$. Tako dobimo naslednjo zvezo:

$$\frac{\sin kR}{kR} + 2 \frac{\cos kR}{(kR)^2} - 2 \frac{\sin kR}{(kR)^3} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\sin kR}{kR} = 0$$

in končno

$$\operatorname{tg} kR = \frac{kR}{1 - \frac{1-\sigma}{2(1-2\sigma)} (kR)^2}. \quad (2.74)$$

Za večje vrednosti kR se rešitve ξ_i od spodaj bližajo $kR = N\pi$, v kar se hitro prepričamo grafično, če narišemo funkciji na levi in desni strani enačbe. Vzemimo $\sigma = 0.25$, kar ustreza jeklu, in numerično poiščimo prvih nekaj rešitev: $\xi_i = k_i R = 2.563, 6.059, 9.280, 12.459\dots$ Lastne frekvence so

$$\omega_i = \frac{\xi_i}{R} \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}. \quad (2.75)$$

Za jekleno kroglico s premerom 5 cm ($\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$) so frekvence približno $\nu_i = 90.5, 214, 328, 440\dots \text{ kHz}$.

3. Deformacije tankih plošč

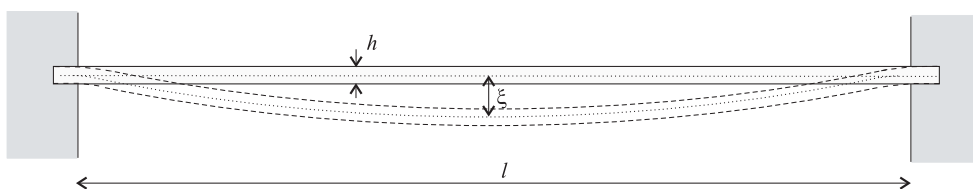
Ogledali si bomo, kaj se zgodi s tankimi ploščami, če jih obremenimo v prečni smeri. Označimo to smer z osjo z . Plošče bomo obravnavali kot dvodimenzionalne objekte. Zanimali nas bodo prečni odmiki u (odmiki v smeri z) posameznih delov plošč. Odmike opisuje enačba [?]

$$K \Delta_{\perp}^2 u - P = 0, \quad \Delta_{\perp} = \nabla_{\perp}^2, \quad (3.1)$$

v kateri je $P(x, y)$ površinska gostota sile (tlak), ki povzroča deformacijo, in K konstanta, ki je odvisna od debeline plošče h ter elastičnih lastnosti snovi, iz katere je plošča narejena, E in σ :

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}.$$

∇_{\perp} označuje odvode v ravnini xy . Enačba (3.1) sledi iz minimizacije proste energije



Slika 3.1: Prerez togo vpete plošče v defomiranem in nedeformiranem stanju.

$$F = F_0 + \frac{1}{2}K \int \left[(\Delta_{\perp} u)^2 + 2(1 - \sigma) \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \right] dS + \int u P dS,$$

Poves plošče je seveda odvisen tudi od tega, kako je plošča vpeta. Pri naši obravnavi bodo plošče vpete na robu, in sicer bodo bodisi togo vpete bodisi prislone. Če je plošča togo vpeta, veljajo naslednji robni pogoji:

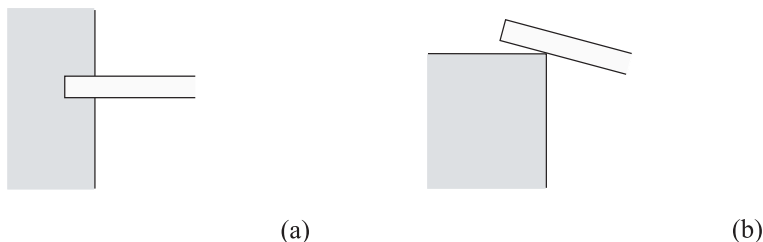
$$u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

kjer $\frac{\partial}{\partial n}$ pomeni odvod v smeri, ki je vzporedna z ravnino plošče in je pravokotna na njen rob. Če je plošča prislonjena, pa velja [?]:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial l} \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

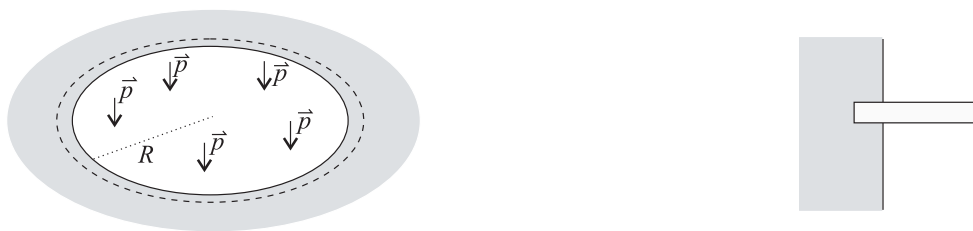
kjer je φ kot med v ravnini xy ležečo normalo na rob in osjo x ali pa kot med tangento na rob in osjo x – odvoda sta v obeh primerih enaka (pozor: to ni polarni kot ϕ točke na robu), $\partial/\partial l$ pa je odvod po dolžini roba. Odvod $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ torej podaja obliko robu plošče.



Slika 3.2: (a) Rob plošče je togo vpet. (b) Plošča je na robu prislonjena.

Naloga

Kako se zaradi lastne teže povesi tanka okrogla plošča, ki je na robu togo vpet?



Slika 3.3: Povest togo vpete plošče pod vplivom lastne teže.

Ploskovna gostota sile je tokrat $P = \frac{F}{S} = \rho gh$. Zaradi simetrije velja, da povest u_z ne bo odvisen od polarnega kota φ . Zato v enačbi (3.1) upoštevamo le radialni del Laplaceovega operatorja. Sledi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \right\} u = \alpha,$$

kjer smo pisali α namesto P/K . Enačbo pomnožimo z r in integriramo po r :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) u = \frac{\alpha r^2}{2} + C_1.$$

Trikratni odvod na levi strani je končen pri $r = 0$ (ne divergira), saj začetna enačba zahteva, da je celo štirikratni odvod končen. Sledi, da je leva stran pri $r = 0$ enaka 0 in torej $C_1 = 0$. Ponovno delimo z r in integriramo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \frac{\alpha r^2}{4} + C_2.$$

V tem primeru se konstante C_2 z gornjim premislekom ne moremo znebiti. Spet množimo z r in integriramo,

$$r \frac{\partial}{\partial r} u = \frac{\alpha r^4}{16} + C_2 \frac{r^2}{2} + C_3.$$

Kot pri na začetku pri C_1 velja spet $C_3 = 0$. Še zadnjič delimo z r in integriramo,

$$u(r) = \frac{\alpha r^4}{64} + C_2 \frac{r^2}{4} + C_4. \quad (3.3)$$

To je že prava oblika rešitve, določiti moramo še konstanti. Upoštevamo robna pogoja

$$u(R) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R) = 0,$$

odkoder dobimo

$$C_2 = -\frac{\alpha}{8} R^2,$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{64} R^4.$$

in rešitev

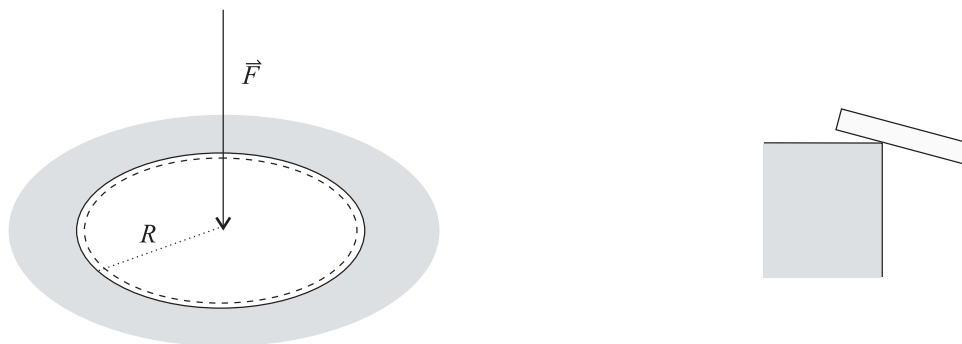
$$u(r) = \frac{\alpha}{64} (r^2 - R^2)^2.$$

Naloga

V točki na sredini okrogle plošče, ki je na robovih prislonjena, deluje sila F_0 . Izračunajmo povos plošče u , če je povos zaradi lastne teže zanemarljiv.

Povos bomo izračunali iz enačbe (3.1). Izraz za gostoto sile P moramo napisati tako, da bo opisoval diskretno silo v sredini plošče, $P = g(r)\delta(r)$. Ker mora biti celotna sila, torej integral gostote sile $2\pi \int P r dr$ po vsej ploskvi, enaka F_0 , sledi $g(r) = F_0 \frac{1}{2\pi r}$ in $P = F_0 \frac{\delta(r)}{r} \frac{1}{2\pi}$. Da bi izračunali povos plošče, moramo torej rešiti enačbo

$$K \Delta^2 u = F_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r}.$$



Slika 3.4: Okroglo ploščo, ki je na robu prisljonjena, obremenimo v središču s točkasto silo.

Ker sta plošča in porazdelitev sil krožno simetrični, je u odvisen samo od r in lahko zgornjo enačbo zapišemo takole:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \right\} u = \alpha \frac{\delta(r)}{r},$$

pri čemer je $\alpha = \frac{F_0}{2\pi K}$. Če pomnožimo zgornjo enačbo z r ter jo integriramo prek δ -porazdelitve (torej od 0 do $r > 0$), dobimo

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] u \Big|_0^r = \alpha.$$

Izraz na levi strani enačbe je pri $r = 0$ enak 0, saj je smiseln samo primer, ko $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) u$ ni singularen. Zgornjo enačbo delimo z r in jo integriramo po r :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \alpha \ln(r/R) + C_1.$$

Integracijski konstanti smo zaradi lepšega odšteli $\alpha \ln R$. Enačbo spet pomnožimo z r in integriramo,

$$r \frac{\partial}{\partial r} u = \alpha \left(\frac{r^2 \ln r/R}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2. \quad (3.4)$$

Še zadnje deljenje z r in integracija,

$$u = \alpha \left(\frac{r^2 \ln(r/R)}{4} - \frac{r^2}{8} - \frac{r^2}{8} \right) + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln(r/R) + C_3.$$

Ker nočemo, da je u divergenten pri $r = 0$, mora biti C_2 v zgornji enačbi enak 0. Sledi

$$u = \frac{\alpha}{4} \left(r^2 \ln \frac{r}{R} - r^2 \right) + \frac{C_1 r^2}{4} + C_3. \quad (3.5)$$

Konstanti C_1 in C_3 bomo določili iz robnih pogojev (3.2):

$$\begin{aligned} u|_{r=R} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \sigma \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

kjer smo upoštevali, da velja $d\varphi/dl = 1/R$. Prvi robni pogoj da zvezo

$$u(R) = -\frac{\alpha R^2}{4} + \frac{C_1 R^2}{4} + C_3 = 0. \quad (3.7)$$

V drugem robnem pogoju nastopata $\frac{\partial u}{\partial r}$ in $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. Odvod $\frac{\partial u}{\partial r}$ lahko preberemo iz enačbe (3.4), $\frac{\partial u}{\partial r}(R) = -\frac{\alpha R}{4} + \frac{C_1 R}{2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ pa dobimo s ponovnim odvajanjem po r :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \Big|_{r=R} = \frac{\alpha}{4} + \frac{C_1}{2}.$$

Vstavimo zgornja izraza v drugi robni pogoj, pa dobimo:

$$C_1 = -\frac{\alpha}{2} \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}.$$

Sedaj lahko določimo še konstanto C_3 iz (3.7),

$$C_3 = \frac{R^2 \alpha}{8} \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma}.$$

Nazadnje vstavimo C_1 in C_3 v (3.5) in dobimo končni izraz

$$u = \frac{\alpha}{4} r^2 \ln(r/R) + \frac{\alpha}{8} \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} (R^2 - r^2).$$

Naloga

Na okroglo ploščo, ki je na robovih prislonjena, deluje sila F_0 , porazdeljena po tankem koncentričnem obroču z radijem $r_0 < R$. Izračunajmo povprečno poves plošče u , če je poves zaradi lastne teže zanemarljiv.

Tokrat moramo rešiti enačbo

$$K \Delta^2 u = F_0 \frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r}, \quad (3.8)$$

torej

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \right\} u = \alpha \frac{\delta(r - r_0)}{r}, \quad (3.9)$$

pri čemer je spet $\alpha = \frac{F_0}{2\pi K}$. Pomnožimo z r in integriramo, pri čemer bomo to, ali smo zajeli silo ali ne, upoštevali s Heavisidovo stopnico $H(r - r_0)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] u = \alpha \frac{1}{r} H(r - r_0). \quad (3.10)$$

Alternativno bi lahko rešitev sestavili iz dveh kosov, za $r < r_0$ in $r > r_0$, ki bi ju nato ustrezno zlepili (zveznost funkcije ter prvega in drugega odvoda). S stopničasto funkcijo si prihranimo veliko dela, saj ni lepljenja (rešitev in njena prvi in drugi odvod sta pri r_0 avtomatsko zvezna).

V nadaljevanju upoštevamo, da je nedoločeni integral čez stopnico

$$\int dx f(x) H(x - x_0) = [F(x) - F(x_0)] H(x - x_0) + C, \quad (3.11)$$

če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$.

Enačbo (3.10) integriramo in pomnožimo z r ,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \alpha r \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) + Ar, \quad (3.12)$$

pa še enkrat integriramo in podelimo z r ,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\alpha}{2} \left[r \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{2r} \right] H(r - r_0) + \frac{A}{2} r, \quad (3.13)$$

pri čemer je tokrat integracijska konstanta 0 zaradi regularnosti v izhodišču. Po zadnji integraciji dobimo

$$u = \frac{\alpha}{4} \left[(r^2 + r_0^2) \ln \frac{r}{r_0} - (r^2 - r_0^2) \right] H(r - r_0) + \frac{A}{4} r^2 + B. \quad (3.14)$$

V robnem pogoju (3.6) nastopa prvi odvod, ki ga preberemo iz enačbe (3.13),

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\alpha}{2} \left[R \ln \frac{R}{r_0} - \frac{R^2 - r_0^2}{2R} \right] + \frac{A}{2} R, \quad (3.15)$$

in drugi odvod, ki ga izračunamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \Big|_{r=R} = \frac{\alpha}{2} \left[\ln \frac{R}{r_0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \right] + \frac{A}{2}. \quad (3.16)$$

Robna pogoja dasta zvezi

$$0 = \frac{\alpha}{4} \left[(R^2 + r_0^2) \ln \frac{R}{r_0} - (R^2 - r_0^2) \right] + \frac{1}{4} AR^2 + B, \quad (3.17)$$

$$0 = \frac{1 + \sigma}{2} \left(A + \alpha \ln \frac{R}{r_0} \right) + \frac{\alpha(1 - \sigma)}{4} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right), \quad (3.18)$$

od koder sledi

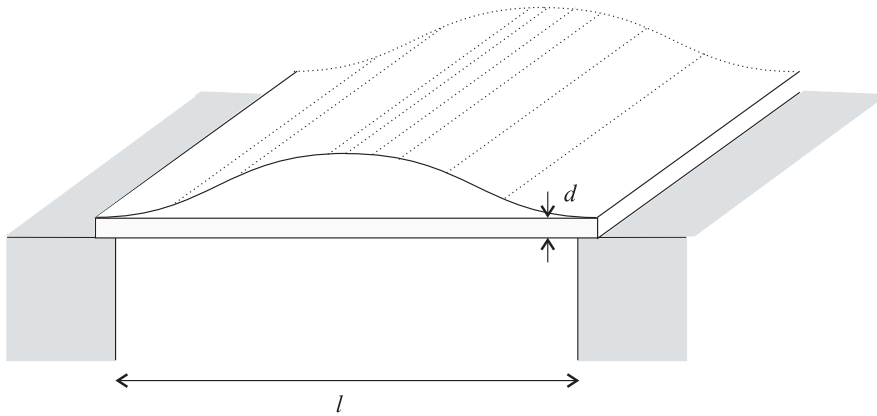
$$A = -\alpha \left[\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \frac{R^2 - r_0^2}{2R^2} + \ln \frac{R}{r_0} \right], \quad (3.19)$$

$$B = \frac{\alpha}{4} \left[\frac{3 + \sigma}{2(1 + \sigma)} (R^2 - r_0^2) - r_0^2 \ln \frac{R}{r_0} \right] \quad (3.20)$$

in rešitev (3.14), ki je zaradi obsežnosti ne bomo izpisali.

Naloga

Dolga jeklena plošča širine $l = 10$ m in debeline $d = 15$ cm je podprta na robovih. V modelu nanjo nasujemo pesek tako, da se višina peska h vzdolž širine plošče spreminja kot $h = a \sin^2 \frac{\pi x}{l}$, kjer je $a = 1$ m. Po dolžini plošče se višina peska ne spreminja. Koliko se plošča povese na sredini? Privzemimo, da je deformacija le prečna. Gostota peska je $\rho_p = 1500$ kg/m³, gostota jekla $\rho_j = 7900$ kg/m³, prožnostni modul $E = 206 \cdot 10^9$ N/m² ter Poissonovo razmerje $\sigma = 0.2$.



Slika 3.5: Povese jeklene traku pod vplivom lastne teže ter teže peska.

Enačba plošče v ravnovesju je

$$K \Delta^2 u = P, \quad (3.21)$$

kjer je P površinska gostota sile, ki povzroča deformacijo:

$$P = \rho_p g a \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \rho_j g d. \quad (3.22)$$

Prvi člen prinese teža peska, drugega pa lastna teža plošče. Ravnovesna enačba je torej

$$K \Delta^2 u = \rho_p g a \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \rho_j g d.$$

Če privzamemo, da je plošča dolga in so zato odvodi v smeri y nič, dobimo enodimenzionalen problem,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \underbrace{\frac{\rho_p g a}{Ed^3} 12(1-\sigma^2)}_A \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \underbrace{\frac{\rho_j g d}{Ed^3} 12(1-\sigma^2)}_B. \quad (3.23)$$

Za K smo vstavili $\frac{Ed^3}{12(1-\sigma^2)}$. Če zgornji izraz štirikrat integriramo in upoštevamo, da je $\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + \text{const.}$, dobimo:

$$u = A \left(\frac{x^4}{48} - \frac{l^4}{32\pi^4} \cos \frac{2\pi x}{l} \right) + B \frac{x^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4. \quad (3.24)$$

Da bi določili koeficiente C_i , moramo upoštevati še robne pogoje. Ker je plošča pri $x = 0$ in $x = l$ podprta, velja (glej stran 46):

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, & u(l) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0) &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l) &= 0. \end{aligned}$$

Iz pogojev pri $x = 0$ sledi

$$-A \frac{l^4}{32\pi^4} + C_4 = 0 \quad \implies \quad C_4 = A \frac{l^4}{32\pi^4}$$

in

$$A \frac{l^2}{8\pi^2} + C_2 = 0 \quad \implies \quad C_2 = -A \frac{l^2}{8\pi^2}.$$

Robni pogoj $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l) = 0$ da zvezo

$$(A + 2B) \frac{l^2}{4} + A \frac{l^2}{8\pi^2} + C_1 l - A \frac{l^2}{8\pi^2} = 0 \quad \implies \quad C_1 = -\frac{l}{4}(A + 2B),$$

C_3 pa dobimo iz preostalega pogoja,

$$C_3 = \frac{l^3}{48} \left(\frac{3A}{\pi^2} + A + 2B \right).$$

Poves plošče je tako

$$u = \frac{l^4}{48} \left[(A + 2B) \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2(A + 2B) \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \frac{A}{\pi^2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(3 \frac{A}{\pi^2} + A + 2B \right) \frac{x}{l} + \frac{3A}{2\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \right].$$

Vrednosti konstant A in B sta

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_j d}{\rho_p a} = 0.79,$$

$$A = \frac{\rho_p g 12(1 - \sigma^2)a}{Ed^3} = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-3},$$

poves plošče na sredini pa

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = 4.6 \text{ cm.}$$

Naloga

Upogib prislone vodoravne kvadratne plošče s stranico a opišemo z razvojem

$$u(x, y) = \sum_{m, n} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Variacijsko določimo poves sredine železne plošče s stranico 1 m in debelino 1 cm zaradi lastne teže. Ocenimo napako, ki jo naredimo, če upoštevamo le prvi člen razvoja. Prožnostni modul železa je $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, Poissonovo število $\sigma = 0.25$, gostota pa $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$.

Pri variacijskem pristopu začnemo direktno s funkcionalom proste energije (3.2),

$$F = F_0 + \frac{1}{2}K \int \left[(\Delta_{\perp} u)^2 + 2(1 - \sigma) \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \right] dS + \int u P dS,$$

namesto z ravnovesno enačbo (3.1). Na zadostitev robnim pogojem vplivamo le z izbiro funkcij v nastavku – za zgornji nastavek se prepričamo, da zadošča robnim pogojem za prislone ploščo (rob je raven, tako da je $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$).

Enkrat računajmo le s prvim členom razvoja (a_{11}), drugič pa vsaj še z dvema, in sicer a_{13} in a_{31} . Zaradi simetrije problema so namreč a_{mn} s sodim indeksom m ali n vsi ničelni. Nastavek vstavimo v funkcional proste energije in integriramo po kvadratu. Pri tem se pokaže, da se zaviti oklepaj pointegri v 0, neglede na izbiro členov razvoja. Utegnemo se celo spomniti, da se da variacijo zavitega oklepaja v celoti prepisati na integral po robu plošče [?] (torej vstopa le v enačbo robnih pogojev), tako da ga že zaradi tega ni treba upoštevati, saj so naši robni pogoji fiksni.

Po integraciji je prosta energija odvisna le še od neznanih koeficientov a_{mn} . Zdaj zahtevamo, da je variacija proste energije ničelna, torej

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = 0$$

za vsak a_{ij} , ki ga imamo v razvoju. Koeficienti potem sledijo z rešitvijo linearnega sistema.

Delo si učinkovito olajšamo s programom za simbolno računanje, npr. z Mathematico. V tem primeru si lahko privoščimo tudi več členov v razvoju. Poglejmo, kako je rezultat, torej

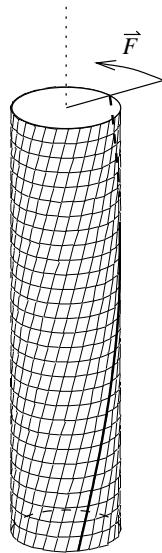
poves sredine plošče, odvisen od izbire členov razvoja:

$$u\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{Pa^4}{\pi^6 K} \begin{cases} 4; & a_{11} \\ 3.89333; & a_{11}, a_{13}, a_{31}, \\ 3.89882; & a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33} \\ 3.90829; & a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}, a_{15}, a_{51} \\ 3.90644; & a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}, a_{15}, a_{51}, a_{35}, a_{53} \\ 3.90670; & a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}, a_{15}, a_{51}, a_{35}, a_{53}, a_{55} \end{cases} .$$

Vidimo, da konvergenca pri dodajanju novih členov ni monotona. Poves sredine plošče zaradi lastne teže je približno

$$u\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 3.9 \frac{\rho g h a^4}{\pi^6 K} = 0.18 \text{ mm}.$$

4. Zvijanje palic



Slika 4.1: Torzijska deformacija palice.

Zanimala nas bo torzijska deformacija palice. Tukaj bomo obravnavali čisto torzijo brez upogiba, pri kateri palica ostane ravna, vsak njen prečni delček pa je zasukan glede na sosednjega okrog osi vzdolž palice. Naj bo to os z , koordinatno izhodišče pa naj bo nekje znotraj palice. V linearnem približku lahko za torzijski zasuk $d\phi$ nedaleč od izhodišča zapišemo $d\phi = \tau dz$, kjer je τ konstanten torzijski zasuk na enoto dolžine. Ob predpostavki, da je torzijska deformacija po vsem preseku majhna ($\tau R \ll 1$, kjer je R prečna dimenzija palice), gre v ravnini xy le za togo rotacijo, $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$. Presek, ki gre skozi izhodišče, vzemimo za nezasukan. Potem pri konstantnem τ sledi

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x, \quad (4.1)$$

neznano deformacijo v smeri z pa v najnižjem redu zapišimo kot

$$u_z = \tau \psi(x, y), \quad (4.2)$$

kjer je $\psi(x, y)$ t.i. torzijska funkcija. Neničelni komponenti deformacijskega tenzorja sta

torej le

$$\begin{aligned} u_{xz} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ u_{xy} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mimogrede opazimo, da je sled u_{kk} nič – torzija ohranja prostornino.

Po Hookovem zakonu (2.1) sta edini neničelni komponenti napetostnega tenzorja

$$\begin{aligned} p_{xz} = p_{zx} &= \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ p_{yz} = p_{zy} &= \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ravnovesni pogoj (2.3) je tako

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} = 0, \quad (4.5)$$

odkoder sledi ravnovesna enačba

$$\Delta \psi = 0, \quad (4.6)$$

kjer je Δ dvodimenzionalni (x,y) Laplace.

Zaradi preprostejšega robnega pogoja (kot bomo videli) vpeljemo novo funkcijo χ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (4.7)$$

S tem ψ že zadošča enačbi (4.6). Komponente napetostnega tenzorja so po enačbi (4.4)

$$p_{zx} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad p_{zy} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (4.8)$$

z enačbo (4.5) pa sledi

$$\Delta \chi = -1. \quad (4.9)$$

Poglejmo še robni pogoj. Na stransko površino palice ne deluje sila, torej tam velja

$$p_{zx}n_x + p_{zy}n_y = 0, \quad (4.10)$$

če je \mathbf{n} v ravnini xy ležeča normala površine. Z en. (4.8) sledi

$$\frac{\partial \chi}{\partial y}n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x}n_y = 0,$$

ko pa upoštevamo še $n_x = -dy/dl$ in $n_y = dx/dl$ (podobni trikotniki), kjer je (x,y) točka na robu, dl pa dolžinski element roba, dobimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}dx + \frac{\partial \chi}{\partial y}dy = d\chi = 0.$$

Na robu je funkcija χ torej konstantna. Pri preseku, ki ima le en rob (enostavno povezano območje), lahko na njem zahtevamo $\chi = 0$. V nasprotnem primeru lahko to zahtevamo le na enem od robov, vrednosti na ostalih pa sledijo iz dodatnih pogojev v zvezi z enoličnostjo u_z [?]. Omeniti velja, da za tanko palico tudi v primeru, ko je stranska ploskev obremenjena s silo (recimo, da torzijo povzročamo tako, da primemo stransko ploskev), dobro velja robni pogoj (4.10). Če je palica tanka, so površinske sile, porazdeljene po stranski površini palice, zanemarljive v primerjavi s tistimi, ki so porazdeljene po preseku, saj je stranska površina sorazmerna z debelino palice, presek pa s kvadratom debeline.

Izračunajmo navor, s katerim je obremenjen presek palice. Navor kaže v smer z . Vemo, da je v ravnovesju konstanten po vsej dolžini palice. Odtod sledi, da je to tudi navor, s katerim moramo obremeniti krajišči palice, če jo želimo torzijsko deformirati. Navor izračunamo po definiciji z integralom po nedeformiranem preseku,

$$M_z = \int dS [\mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)] \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = \int dS (x p_{yz} - y p_{xz}). \quad (4.11)$$

Vstavimo (4.4):

$$M_z = -2\mu\tau \int dS \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = -2\mu\tau \int dS \mathbf{r} \cdot \nabla \chi. \quad (4.12)$$

Vidimo, da v ravnovesju velja $\tau = \text{const}$. Za enostavno povezano območje se spleča razvijati naprej. Pišimo $\mathbf{r} \cdot \nabla \chi = \nabla(\chi \mathbf{r}) - \chi(\nabla \cdot \mathbf{r}) = \nabla(\chi \mathbf{r}) - 2\chi$:

$$M_z = -2\mu\tau \int dS [\nabla \cdot (\chi \mathbf{r}) - 2\chi] = -2\mu\tau \left[\oint dl \mathbf{n} \cdot (\chi \mathbf{r}) - 2 \int dS \chi \right].$$

Pri prvem členu smo uporabili ravninsko inačico Gaussovega zakona. Če na robu enostavno povezanega območja velja $\chi = 0$, prvi člen odpade in je navor preprosto

$$M_z = 4\mu\tau \int dS \chi(x, y). \quad (4.13)$$

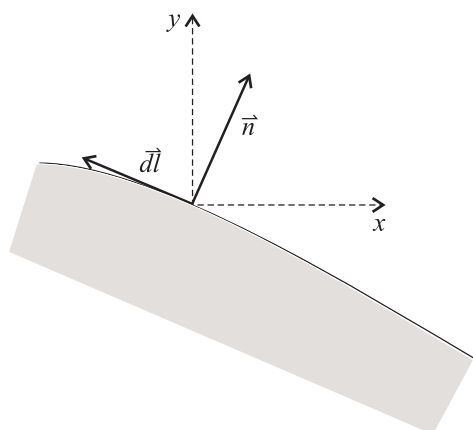
Smiselna je definicija torzijske konstante G , $M_z = G\tau$,

$$G = 4\mu \int dS \chi(x, y). \quad (4.14)$$

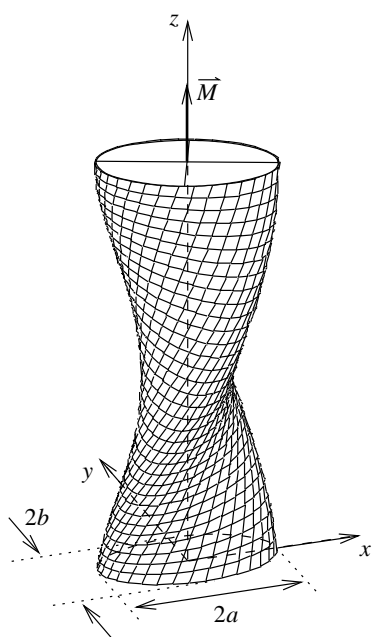
Naloga

Izračunajmo deformacijo palice s profilom v obliki elipse, ki jo torzijsko obremenimo z navorom M .

Za zapis vektorja deformacije \mathbf{u} , (4.1) in (4.2), moramo določiti funkcijo $\psi(x, y)$ in velikost torzijskega parametra τ . Funkcijo ψ določimo prek funkcije χ (4.9), parameter τ pa pri znanem χ prek navora (4.12) ali (4.13).



Slika 4.2: Element loka izrazimo s komponentami vektorja normale.



Slika 4.3: Torzija palice, katere presek je elipsa.

Eliptičn rob preseka opiše enačba $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Reševanja enačbe $\nabla^2\chi = -1$ se bomo lotili z majhnim trikom. Nastavek za χ bomo izbrali tako, da bo ustrezal robnemu pogoju, potem pa bomo poskusili določiti neznanu funkcijo tako, da bo nastavek rešil dife-

rencialno enačbo:

$$\chi = C(x, y) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

kjer je C neznana funkcija x in y . Najprej bomo poskusili z najbolj enostavnim nastavkom, v katerem je C konstanta. Vstavimo torej nastavek v diferencialno enačbo,

$$\nabla^2 \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = C \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -1.$$

Nastavek s $C = \text{const.}$ je torej uporaben. Sledi:

$$C = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

Tako dobimo za χ izraz

$$\chi = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (4.15)$$

Sedaj izračunamo še ψ po enačbah (4.7):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) = -\frac{a^2 y}{a^2 + b^2}, \quad \text{torej} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2 \frac{a^2 y}{a^2 + b^2} + y. \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = \frac{b^2 x}{a^2 + b^2}, \quad \text{torej} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2 \frac{b^2 x}{a^2 + b^2} - x. \quad (4.17)$$

Integrirajmo $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ iz (4.16) po x , $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ iz (4.17) pa po y :

$$\psi = \left(-\frac{2a^2}{a^2 + b^2} + 1 \right) xy + A(y) = xy \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + A(y),$$

$$\psi = \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) xy + B(x) = xy \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + B(x).$$

Ko obe enačbi primerjamo, ugotovimo, da morata biti funkciji $A(y)$ in $B(x)$ enaki konstanti, zato velja

$$\psi = xy \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + \text{const.}$$

Vrednost konstante ni pomembna in jo lahko postavimo na 0, saj pomeni samo premik celega nosilca v smeri dolge osi. Za posebni primer, ko je presek nosilca okrogel in je $b = a$, je $\psi = 0$ in ni nikakršnih premikov v z smeri.

Torzijski parameter τ bomo določili iz navora (4.12). Vstavimo izraz (4.15) in dobimo

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{2\tau\mu}{2(a^2 + b^2)} \int_{\text{po preseku}} [x(2xb^2) + y(2ya^2)] dx dy = \\ &= \frac{2\tau\mu}{a^2 + b^2} \int_{\text{po preseku}} (x^2 b^2 + y^2 a^2) dx dy. \end{aligned}$$

Zgornji integral najlaže uženemo z uvedbo eliptičnih koordinat: $x' = x/a$, $y' = y/b$, tako da je na robu preseka $x'^2 + y'^2 = 1$. Sedaj lahko izračunamo

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{2\tau\mu}{a^2 + b^2} \int_{\text{po preseku}} (a^2 b^2 x'^2 + a^2 b^2 y'^2) ab dx' dy' = \\ &= \frac{2\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_{\text{po preseku}} (x'^2 + y'^2) dx' dy'. \end{aligned}$$

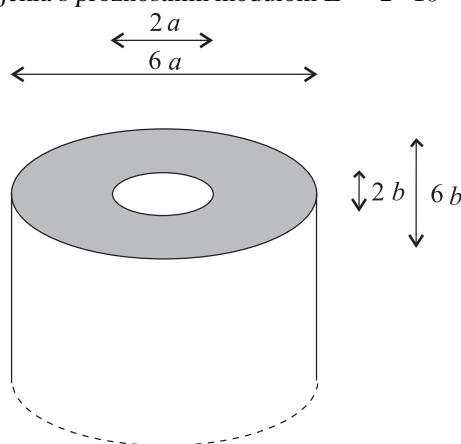
Rešitev zgornjega integrala, uvedba polarnih koordinat, se ponuja sama od sebe. Zapišimo $x' = r \cos \varphi$ in $y' = r \sin \varphi$, pa dobimo:

$$M_z = \frac{2\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{2\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Iz zgornjega zapisa določimo τ in vektor \mathbf{u} je določen. Za konec pogledjmo še poseben primer: nosilec z okroglim profilom ($a = b$). V tem primeru je $M_z = \pi\tau\mu a^4/2$.

Naloga

S kolikšnim navorom moramo zavrteti 10 m dolgo palico, katere presek opišemo z dvema enako zasukanima koncentričnima elipsama z dolžinama dolge in kratke osi $2a = 4$ cm in $2b = 2$ cm ter $a_1 = 3a$, $b_1 = 3b$, da se bo eno krajišče palice glede na drugo zasukalo za kot π ? Palica je narejena iz jekla s prožnostnim modulom $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m² ter $\sigma = 0.2$.



Zvezo med kotom zasuka zgornjega krajišča palice ter navorom, ki zasuk povzroči, bomo poiskali s pomočjo funkcije χ . To bomo določili na podoben način kot v prejšnji nalogi, ko smo opisovali torzijo palice z eliptičnim presekom. Spet bomo najprej zapisali enačbi elips, ki določata zunanji in notranji rob palice. Enačba notranje elipse se glasi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, zunanje pa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 9$. Nastavek za funkcijo χ , ki mora biti na robu palice konstantna, v sredini pa mora zadostiti enačbi $\nabla^2 \chi = -1$, se sedaj ponuja kar sam od sebe. Če namreč

izberemo χ ravno tak kot v prejšnji nalogi,

$$\chi = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

(enačba (4.15)), potem je χ na notranjem robu palice enak nič, tako kot v prejšnjem primeru. Na zunanem robu pa je tudi konstanten. Enak je $(-a^2 b^2 / 2(a^2 + b^2)) \times (9 - 1) = -4a^2 b^2 / (a^2 + b^2)$.

Ker je χ enak kot v prejšnji nalogi, ostane tudi komponenta vektorja deformacije v smeri osi z nespremenjena,

$$\psi = \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) xy + B(x) = xy \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Poiskati moramo samo še zvezo med navorom ter kotom zasuka. To bomo spet storili z uporabo enačbe za navor (4.12), v katero bomo vstavili izraz za χ (4.15). Tako kot v prejšnji nalogi bomo zapisali

$$M_z = \frac{2\tau\mu}{2(a^2 + b^2)} \int_{\text{po preseku}} [x(2xb^2) + y(2ya^2)] dx dy$$

ter zgornji izraz z uvedbo eliptičnih koordinat predelali v obliko

$$M_z = \frac{2\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 r^3 dr = \frac{2\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{2\pi}{4} (3^4 - 1) = 80 \frac{\pi\tau\mu a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Drugačni kot v prejšnji nalogi sta samo integracijski meji. Namesto od 0 do 1 integriramo po r od 1 do 3, saj opisuje v eliptičnih koordinatah zunanjo elipso enačba $r = 3$, notranjo pa enačba $r = 1$. Navor, s katerim moramo obremeniti palico, je torej enak 105,3 kN. Upoštevali smo, da je $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$.

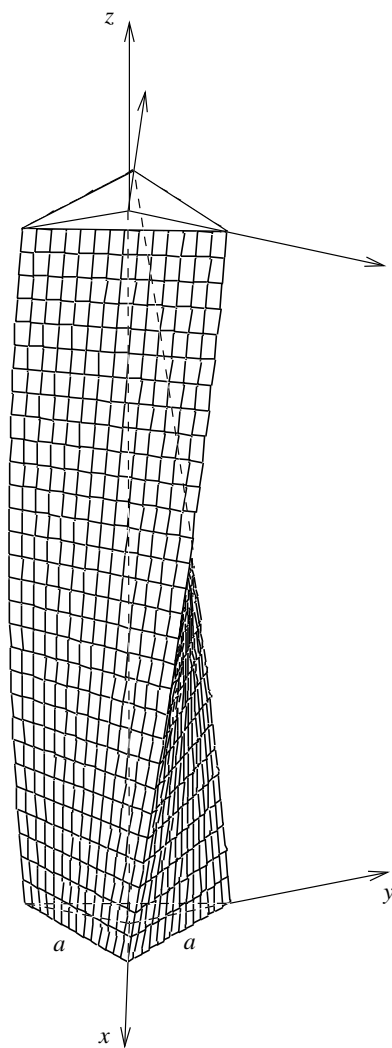
Naloga

Izračunajmo še deformacijo nosilca s presekom v obliki enakostraničnega trikotnika s stranico a , če ga torzijsko obremenimo z navorom M .

Rešitev bomo poiskali na podoben način kot pri nosilcu s presekom v obliki elipse. Nastavek za $\chi(x, y)$ bomo spet uganili. Zapisali ga bomo kot produkt konstante in neke funkcije, ki je na robovih trikotnika enaka nič.

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v težišče, da bo problem čim bolj simetričen. Oglišča trikotnika so potem v točkah A, B, C , ki imajo naslednje koordinate:

$$A \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3} \right), \quad B \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6} \right), \quad C \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6} \right),$$



Slika 4.4: Torzija palice s trikotnim presekom.

enačbe premic nosilk stranic trikotnika pa se glasijo

$$p_1 : y = -\sqrt{3}x + \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$p_2 : y = \sqrt{3}x + \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$p_3 : y = -\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Bralec se lahko takoj prepriča, da je naslednji izraz za χ enak nič na vseh robovih trikotnika:

$$\chi = C \left(y + \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) \left(y - \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right). \quad (4.18)$$

Preverimo, ali tudi tedaj, ko je C konstanta, nastavek (4.18) zadošča enačbi (4.9) $\Delta\chi = -1$. Za lažji račun označimo izraze v oklepajih z α , β in γ takole:

$$y + \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \alpha, \quad y - \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \beta \quad \text{in} \quad y + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \gamma.$$

Parcialna odvoda funkcije χ po x in y imata potem vrednosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi}{\partial x} &= C\sqrt{3}\beta\gamma - C\sqrt{3}\alpha\gamma, \\ \frac{\partial\chi}{\partial y} &= C\beta\gamma + C\alpha\beta + C\alpha\gamma. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Izračunajmo še druge odvode, pa dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} &= -3C\gamma - 3C\gamma = -6C\gamma, \\ \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} &= C(\beta + \gamma + \alpha + \beta + \alpha + \gamma) = 2C(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Vstavimo odvode v enačbo (4.9):

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 2C(\alpha + \beta - 2\gamma) = -1, \\ 2C \left(y + \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} + y - \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2y - \frac{2a\sqrt{3}}{6} \right) &= -2Ca\sqrt{3} = -1 \end{aligned}$$

in izrazimo konstanto C ,

$$C = \frac{1}{2a\sqrt{3}}.$$

Funkcija χ reši enačbo (4.9), če ima naslednjo obliko:

$$\chi = \frac{1}{2a\sqrt{3}} \left(y + \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) \left(y - \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right).$$

Preostane nam še naloga, da iz enačb (4.7) izračunamo funkcijo ψ . Vstavimo odvoda χ po x in y , ki smo ju izračunali v (4.19), in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= y + 2C(\gamma\beta + \alpha\beta + \alpha\gamma), \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= 2C\sqrt{3}\gamma(\alpha - \beta) - x. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Integrirajmo prvo enačbo po x ,

$$\begin{aligned}\psi &= xy + 2xC \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) \left(y + a\frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \\ &+ 2xC \left(y^2 - \frac{2\sqrt{3}a}{3}y - x^2 + \frac{a^2}{3} \right) + \\ &+ 2xC \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) + d(y).\end{aligned}$$

Funkcijo $d(y)$ lahko določimo tako, da zgornji izraz odvajamo po y in ga primerjamo z drugo enačbo (4.20):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y} &= x + 2xC \left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) + 2xC \left(2y - \frac{2\sqrt{3}a}{3} \right) \\ &+ 2xC \left(2y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) + \frac{\partial d(y)}{\partial y}.\end{aligned}$$

Po potrpežljivem primerjanju členov in ob upoštevanju izraza $c = 1/2a\sqrt{3}$ sledi, da je $d(y)$ konstanta, ki jo bomo postavili na nič, in

$$\psi(x, y) = \frac{x\sqrt{3}}{3a}(3y^2 - x^2).$$

Če vstavimo v zgornji izraz koordinate oglišč trikotnika,

$$\begin{aligned}\psi \left(0, a\frac{\sqrt{3}}{3} \right) &= 0, \\ \psi \left(\frac{a}{2}, -a\frac{\sqrt{3}}{6} \right) &= 0, \\ \psi \left(-\frac{a}{2}, -a\frac{\sqrt{3}}{6} \right) &= 0,\end{aligned}$$

ugotovimo, da je deformacija v smeri nosilca v vseh ogliščih enaka nič. Vrednost parametra τ po vzorcu prejšnje naloge izračunajte sami. Skicirajte, v katerih delih trikotnika je u_z pozitiven, v katerih negativen in kje je enak nič. Ugotovili boste, da je u_z enak nič na težiščnicah.

5. Upogib palic

Ponovimo, kako opišemo splošno deformacijo tanke elastične palice v ravnovesju (Kirchoffova teorija elastičnega filameta) [?]. Ravnovesje sil na element palice z dolžino dl zahteva

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} + \mathbf{K} = 0, \quad (5.1)$$

kjer je $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$ elastična sila sosednjega elementa na prednjo (v smislu naraščajočega l) ploskev izbranega elementa (sila na nasprotno ploskev je $-\mathbf{F}$), \mathbf{K} pa dolžinska gostota zunanjih sil na palico. Ravnovesje navorov na izbrani element zahteva

$$\frac{d\mathbf{M}}{dl} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} = 0, \quad (5.2)$$

kjer je $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ elastični navor naslednjega elementa glede na središče prednje ploskve izbranega elementa (navor prejšnjega elementa glede na isto točko je $-\mathbf{M}$), \mathbf{t} pa enotski vektor v smeri tangente na palico, $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl = \dot{\mathbf{r}}$.

Ponovimo: $\mathbf{F}(l)$ in $\mathbf{M}(l)$ sta sila oziroma navor, s katerima so obremenjeni posamezni preseki palice, in lahko kažeta v katerokoli smer. Iz ravnovesnega pogoja za celoten del palice od l naprej pa seveda tudi sledi, da sta $\mathbf{F}(l)$ in $\mathbf{M}(l)$ vsoti vseh zunanjih sil oziroma navorov na ta del palice.

Navor, s katerim je obremenjen presek palice, je z njeno deformacijo povezan prek enačbe

$$\mathbf{M} = G\tau \mathbf{t} + EI \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}, \quad (5.3)$$

kjer je G torzijska konstanta (4.14), τ torzijski zasuk na enoto dolžine, I pa geometrijski vztrajnostni moment preseka palice, ki si ga bomo podrobneje ogledali v nadaljevanju. Tukaj smo privzeli, da je izotropen, torej $\int dS y^2 = \int dS x^2$.

Odslej bomo obravnavali le upogib brez torzije, tako da navor, s katerim je obremenjen presek palice, ne bo imel vzdolžne komponente,

$$\mathbf{M} = EI \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}. \quad (5.4)$$

Če združimo enačbi (5.2) in (5.4), dobimo

$$EI \mathbf{t} \times \ddot{\mathbf{t}} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} = 0. \quad (5.5)$$

Enačbi (5.1) in (5.5) opisujeta upogib tanke palice pod vplivom zunanjih sil in navorov, če ni torzije. Slednje velja za celotno palico [?], če le na krajišče ne deluje navor v vzdolžni smeri.

Kadar na palico deluje diskretna (točkasta) zunanja sila $\Delta \mathbf{F}$, sila \mathbf{F} , s katero je obremenjen presek palice, v smeri naraščajočega l poskoči za $-\Delta \mathbf{F}$, kar je razvidno tudi iz enačbe (5.1). Enačba (5.2) in zato tudi enačba (5.5) ostaneta nespremenjeni. Iz (5.5) vidimo, da je v tem primeru nezvezen $\dot{\mathbf{t}}$.

Kadar na palico deluje diskreten (točkast) navor $\Delta \mathbf{M}$, torej točkasta dvojica sil, poskoči navor, s katerim je obremenjen presek palice, in sicer za $-\Delta \mathbf{M}$ v smeri naraščajočega l . Na silo \mathbf{F} to ne vpliva – enačba (5.1) še vedno velja. Iz (5.4) pa vidimo, da je tokrat nezvezna ukrivljenost $\dot{\mathbf{t}}$. Enačba (5.5) seveda še vedno velja, le skok v $\dot{\mathbf{t}}$ moramo upoštevati.

5.1 Majhen upogib

V primeru majhnih upogibov se da enačbi (5.1) in (5.2) združiti, tako da se znebimo sile \mathbf{F} . Odvajajmo (5.2) po l :

$$\frac{d^2 \mathbf{M}}{dl} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{F}}{dl} + \frac{d\mathbf{t}}{dl} \times \mathbf{F} = 0. \quad (5.6)$$

Če je palica le malo upognjena, se izkaže, da je tretji člen zanemarljiv – razen v primeru, ko je palica obremenjena s končno vzdolžno silo \mathbf{F}_0 – drugi člen pa izrazimo s \mathbf{K} . Neredko navedeni argument, da je tretji člen majhen v primeri z drugim, ne vzdrži (ko je $d\mathbf{F}/dl = 0$, na primer), ampak je treba celo enačbo konsistentno zapisati v najnižjem, prvem redu odmikov. Neupognjena palica naj leži vzdolž z osi, upognjeno pa opišimo z $\mathbf{r}(l) = (x(l), y(l), z(l))$. Tangentni vektor je potem

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dz} \frac{dz}{dl} = \frac{(\dot{x}, \dot{y}, 1)}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \approx (\dot{x}, \dot{y}, 1), \quad (5.7)$$

kjer pika tokrat označuje odvod po z (v prvem redu je enak odvodu po l). Najprej zapišimo navor na presek (5.4): v najnižjem redu x in y ta nima z komponente,

$$\mathbf{M} \approx EI(-\ddot{y}, \ddot{x}, 0), \quad (5.8)$$

in to je ključno za približek majhnih odmikov. Iz prvih dveh komponent enačbe (5.2) tako dobimo sili na presek,

$$F_x = -EIx^{(3)} + F_z \dot{x}, \quad F_y = -EIy^{(3)} + F_z \dot{y}, \quad (5.9)$$

po ponovnem odvajanju pa komponenti enačbe (5.6) v prvem redu,

$$EIx^{(4)} - F_z \ddot{x} - \dot{F}_z \dot{x} - K_x = 0, \quad EIy^{(4)} - F_z \ddot{y} - \dot{F}_z \dot{y} - K_y = 0. \quad (5.10)$$

Enačbe (5.9) in (5.10) smo zapisali v primeru močne (končne) vzdolžne sile F_z , ki nastopa npr. v primeru Eulerjeve nestabilnosti palice, pri čemer smo dopustili možnost, da se F_z vzdolž palice spreminja (na primer pri Eulerjevi nestabilnosti zaradi lastne teže). Kadar F_z ni končna (kadar gre proti nič, ko gre odmik proti nič), so členi z F_z višjih redov in jih zavržemo. Lep primer je majhen upogib palice, katere krajišči sta togo vpeti v nepremični

steni. Vzdolžna natezna sila, ki se pojavi v palici zaradi podaljšanja njene dolžine pri upogibu, je več kot ničtega (celo drugega) reda v odmikih in je zato ni treba upoštevati. Brez končne vzdolžne sile torej

$$EIx^{(4)} - K_x = 0, \quad EIy^{(4)} - K_y = 0. \quad (5.11)$$

5.2 Vztrajnostni momenti ploskev

V do sedaj zapisanih enačbah smo privzeli, da je vztrajnostni moment preseka I izotropen, kar pomeni, da velja tudi za presek v obliki enakostraničnega trikotnika, kvadrata in nasploh kateregakoli pravilnega večkotnika (to sledi neposredno iz simetrijskih lastnosti). V resnici je vztrajnostni moment dvodimenzionalni simetrični tenzor, katerega definicijo zapišimo zaradi completeness,

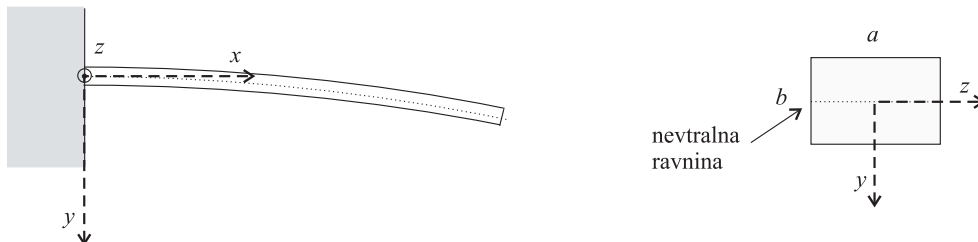
$$I_{ij} = \iint dx dy (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j), \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (5.12)$$

Za diagonalne elemente je v navadi tudi zapis $I_x \leftarrow I_{yy}$ in $I_y \leftarrow I_{xx}$ glede na os upogiba. Do sedaj zapisane enačbe veljajo tudi, kadar so sile na palico \mathbf{K} koplanarne in njihova ravnina vsebuje eno od dveh glavnih osi vztrajnostnega momenta. V tem primeru je treba v enačbah za I vstaviti ali I_1 ali I_2 .

Naloga

Izračunajmo tenzor vztrajnostnega momenta za pravokotni in okrogli presek.

POPRAVI OZNAČBE NA SLIKAH $x \rightarrow z$



Slika 5.1: Prečna deformacija palice. Os z kaže vzdolž palice.

Os z naj kaže vzdolž palice. Če je presek palice pravokotnik s stranicama a in b , sta glavna vztrajnostna momenta

$$I_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy dx y^2 = \frac{b^3 a}{12}, \quad I_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy dx x^2 = \frac{a^3 b}{12}. \quad (5.13)$$

Za upogib v ravnini yz vzamemo I_1 .

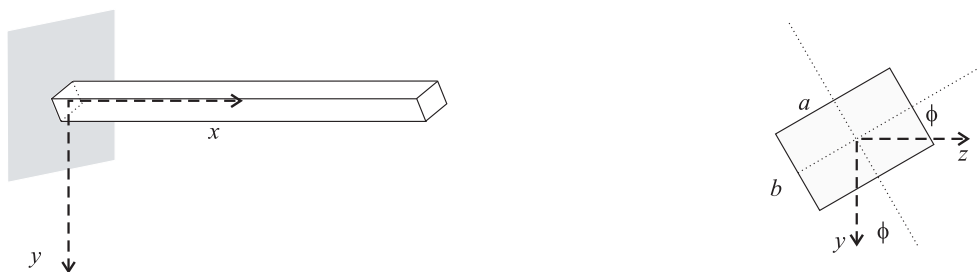
Izračunajmo še vztrajnostni moment krožnega preseka. V tem primeru je integral po preseku smiselno zapisati v polarnih koordinatah:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\phi r^2 \sin^2 \phi = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (5.14)$$

Kakšen pa je vztrajnostni moment tedaj, ko palico s pravokotnim presekom zavrtimo za kot ϕ okoli osi z ? Zavrteli bomo tenzor vztrajnostnega momenta ploskve, katerega diagonalna elementa že poznamo. V lastnem sistemu, v katerem so stranice pravokotnika vzporedne z osema x in y , ima tenzor I naslednje elemente:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{ab^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{a^3b}{12} \end{bmatrix}.$$

Ko palico zasučemo za kot ϕ , dobi tenzor vztrajnostnega momenta preseka komponente



Slika 5.2: Palico s pravokotnim presekom zavrtimo okoli osi z za kot ϕ .

$$\begin{aligned} I' &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{ab^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{a^3b}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{ab^3}{12} \cos^2 \phi + \frac{a^3b}{12} \sin^2 \phi & \left(\frac{ab^3}{12} - \frac{a^3b}{12} \right) \sin \phi \cos \phi \\ \left(\frac{ab^3}{12} - \frac{a^3b}{12} \right) \sin \phi \cos \phi & \frac{ab^3}{12} \sin^2 \phi + \frac{a^3b}{12} \cos^2 \phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je v primeru, ko je $a = b$, I' enak I .

Tenzorska narava vztrajnostnega momenta se pokaže, kadar palice ne obremenimo v eni od lastnih smeri. Privzemimo, da so sile ravninske. V tem primeru se palica še vedno upogne v eni ravnini, ki pa ne sovpada več z ravnino sil [?].

5.3 Velike deformacije palic

Naloga

Izračunajmo, kako se upogne palica z dolžino L , ki je na enem koncu toga vpeta, na drugem pa nanjo delujemo s silo F .

Računali bomo z eksaktnimi enačbami (5.1)-(5.5). Opravka imamo samo s točkastima silama na krajišči palice, zato je sila v palici po vsej dolžini konstantna (enačba (5.1)) in enaka zunanji sili \mathbf{F} (skoka sile sta na koncih palice). Silo torej poznamo, obliko pa izračunamo z enačbo (5.5). Podali jo bomo s kotom θ med osjo y in smerjo palice, torej

$$\mathbf{t} = (\sin \theta, \cos \theta, 0). \quad (5.15)$$

Poiščimo še $\ddot{\mathbf{t}}$. Dvakrat odvajamo po l in dobimo

$$\ddot{\mathbf{t}} = \left(-\sin \theta \dot{\theta}^2 + \cos \theta \ddot{\theta}, -\cos \theta \dot{\theta}^2 - \sin \theta \ddot{\theta}, 0 \right). \quad (5.16)$$

Vektorska produkta, ki nastopata v enačbi (5.5), sta potem

$$\mathbf{t} \times \ddot{\mathbf{t}} = (0, 0, -\ddot{\theta}), \quad \mathbf{t} \times \mathbf{F} = (0, 0, -F \sin \theta). \quad (5.17)$$

Neničelna je torej le z komponenta enačbe (5.5),

$$\ddot{\theta} - \frac{F}{EI} \sin \theta = 0. \quad (5.18)$$

Te nelinearne navadne diferencialne enačbe ne znamo rešiti, znamo pa poiskati njen prvi integral. (Če si to enačbo, ki vsebuje le drugi odvod funkcije in funkcijo samo, predstavljamo kot Newtonov zakon, potem je njen prvi integral ohranitev energije. Zapomnimo si, da ta obstaja za vsako enodimenzionalno enačbo, ki vsebuje le funkcijo in njen drugi odvod.) Pomnožimo jo s $\dot{\theta}$ in $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ v prvem členu zapišimo kot odvod,

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dl} - \frac{F}{EI} \sin \theta \dot{\theta} = 0, \quad (5.19)$$

ter integrirajmo,

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{F}{EI} \cos \theta = \frac{F}{EI} C, \quad (5.20)$$

kjer je FC/EI integracijska konstanta. Imamo torej

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2F}{EI}(C - \cos \theta)}. \quad (5.21)$$

Predznak minus smo izbrali zato, ker se kot z naraščajočim l zmanjšuje. Konstanto C določimo z robnim pogojem na prostem koncu, na katerega ne deluje navor in je zato tam po enačbi (5.4) ukrivljenost $\dot{\theta} \propto \theta$ ničelna. Velja torej

$$\dot{\theta} \Big|_{l=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \cos \theta_0, \quad (5.22)$$

če je $\theta_0 = \theta(L)$ kot palice na prostem koncu. Robni pogoj na vpetem koncu pa zahteva $\theta(0) = \pi/2$. Prvi integral enačbe (5.18) je torej

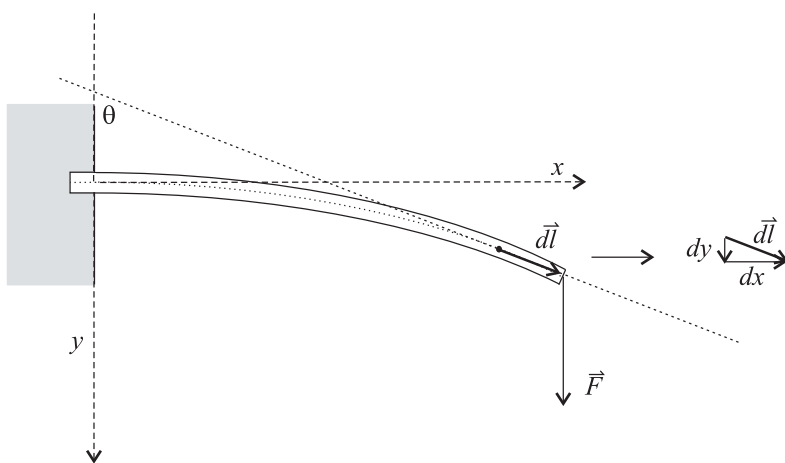
$$\frac{d\theta}{dl} = -\sqrt{\frac{2F}{EI}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}. \quad (5.23)$$

Odtod je oblika palice načeloma določena z (eliptičnim) integralom

$$l = -\int_{\pi/2}^{\theta(l)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2F}{EI}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}, \quad (5.24)$$

ki ni elementarno izrazljiv. Malo dlje pridemo, če obliko namesto z l parametriziramo z x , pri čemer upoštevamo $dx = dl \sin\theta$:

$$x = -\int_{\pi/2}^{\theta(l)} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\frac{2F}{EI}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = \sqrt{\frac{2EI}{F}} \left(\sqrt{\cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta} \right) \quad (5.25)$$

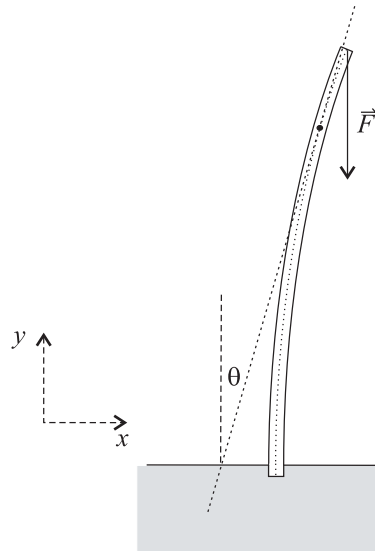


Slika 5.3: Palico s krožnim presekom na enem koncu togo vpenemo, prosti konec pa močno upognemo.

Oglejmo si še zgled, ki ga lahko vsaj v mejnem primeru rešimo analitično. Zanimala nas bo deformacija palice, ki jo na enem koncu togo vpenemo, na drugem pa obremenimo s silo, ki kaže vzdolž palice. Zelo majhen sunek v prečni smeri spravi palico iz ravne oblike v položaj, ki je predstavljen na sliki 5.4.

Robni pogoji se sedaj razlikujejo od tistih v enačbi (5.22). Pri $x = 0$ in $y = 0$ kaže tangenta na palico v smeri osi y , zato je $\theta(0) = 0$ in θ narašča z l . Še vedno pa velja, da je $C = \cos\vartheta_0$. Glede na prejšnji primer je smer sile obrnjena, sedaj kaže v smeri $-y$. Tako dobimo

$$l = \int_0^{\theta(l)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2F}{EI}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}, \quad (5.26)$$



Slika 5.4: Palico, ki je na enem koncu togo vpeta, obremenimo z vzdolžno silo.

$$x = \int_0^{\theta(l)} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{\frac{2F}{EI}(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \sqrt{\frac{2EI}{F}} \left(\sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \right) \quad (5.27)$$

Oglejmo si primer, ko je deformacija palice majhna. Takrat velja $\theta_0 \ll 1$ in $\vartheta \ll 1$. Če enačbo (5.26) razvijemo do drugega reda v θ , dobimo

$$l = \int_0^{\theta(l)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{F}{EI}(\theta_0^2 - \theta^2)}} = \sqrt{\frac{EI}{F}} \arcsin \frac{\theta}{\theta_0}, \quad (5.28)$$

Spomnimo se, da je θ_0 kot palice pri $l = L$. Enačba (5.28) je torej smiselna le, če velja

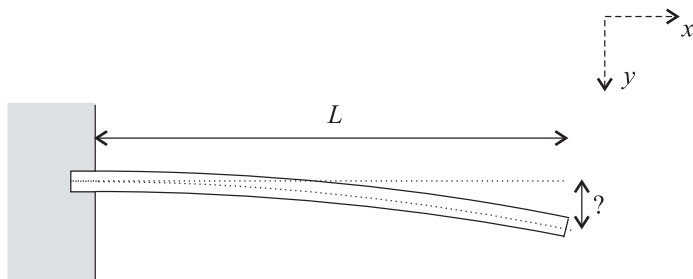
$$L = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{F}}. \quad (5.29)$$

V najnižjem redu θ rešitev torej obstaja le pri kritični sili $F_c = \pi^2 EI / 4L^2$. Če je sila manjša od kritične, obstaja le trivialna rešitev $\theta(l) = 0$, če je večja, pa drugi red ne zadostuje. Nad kritično silo je ravna oblika palice nestabilna – palica se ob najmanjši motnji upogne.

5.4 Majhne deformacije palic

Naloga

Za koliko se pod lastno težo povesi vodoravna palica dolžine L , ki je na eni strani togo vpeta, na drugi strani pa prosto visi? S kolikšno silo in navorom deluje palica na steno?



Slika 5.5: Palica dolžine L je na enem krajišču togo vpeta in na drugem prosta.

Os y usmerimo navzdol, os x pa naj kaže v smeri palice. Opravka imamo z dolžinsko porazdeljeno silo $K_y = mg/L$. Enačba (5.11) za odmik u je torej

$$u^{(4)} = \alpha, \quad (5.30)$$

kjer je $\alpha = mg/EIL$, z rešitvijo

$$u = \frac{\alpha}{24}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad (5.31)$$

kjer so A , B , C , D konstante, ki jih bomo določili iz robnih pogojev. Ker je v izhodišču palica togo vpeta, sta predpisana tako odmik kot naklon, in velja

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (5.32)$$

Na prostem koncu pa imamo pogoja za navor (5.8) in silo (5.9), ki delujeta v palici. Konec ni obremenjen ne z navorom ne s silo, tako da tam velja

$$\ddot{u}(L) = 0, \quad u^{(3)}(L) = 0. \quad (5.33)$$

Iz prvih dveh robnih pogojev dobimo $D = 0$ in $C = 0$, nato pa še $A = -\alpha L/6$ in $B = \alpha L^2/4$. Odmik palice je torej

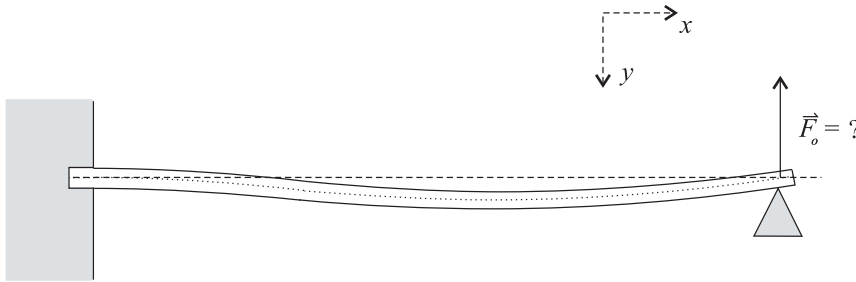
$$u(x) = \alpha \left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + \frac{L^2}{4}x^2 \right). \quad (5.34)$$

Zanimata nas še sila in navor, s katerima deluje palica na steno. Iz osnov takoj sledi, da je sila enaka mg v smeri navzdol, navor pa $mgL/2$ v smeri osi z . Isto moramo dobiti tudi iz

enačb (5.8) in (5.9). Pri navoru (5.8) je treba zaradi predznaka paziti, da pravilno (ciklično) preimenujemo osi. Os z v (5.8) je zdaj os x , torej $z \rightarrow x$, $x \rightarrow y$ in $y \rightarrow z$. Navor je $M_z(0) = EI \ddot{u}(0) = mgL/2$, sila pa $F_y(0) = -EI u^{(3)}(0) = mg$. Spomnimo se, da sta to sila in navor na prednjo (v našem primeru desno) ploskev elementa, kar pri $l = 0$ pomeni, da sta to res sila in navor na steno.

Naloga

Vodoravna palica dolžine L je na enem koncu togo vpeta v steno, na drugem koncu pa je podprta, in sicer tako, da sta obe krajišči na isti višini. Zanima nas, kakšen je upogib palice zaradi lastne teže ter kolikšna je velikost sile F_0 v krajišču, kjer je palica podprta.



Slika 5.6: Palica je na enem krajišču togo vpeta, na drugem podprta.

Levo krajišče naj bo togo vpeto, desno podprto, koordinatni sistem pa tak kot v prejšnji nalogi. Rešitev je ista kot (5.31) v prejšnji nalogi, le robni pogoj je drugačen. Na levem robu velja kot prej $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, na desnem pa

$$u(L) = 0, \quad \ddot{u}(L) = 0, \quad (5.35)$$

saj podporišče preseka palice ne more obremeniti z navorom. Iz prvih dveh robnih pogojev sledi $C = D = 0$, nato pa še $A = -5\alpha L/48$ in $B = \alpha L^2/16$. Oblika palice je torej

$$u(x) = \alpha \left(\frac{x^4}{24} - \frac{5Lx^3}{48} + \frac{L^2x^2}{16} \right). \quad (5.36)$$

Velikost sile na palico v podprtem krajišču izračunamo iz enačbe (5.9),

$$F_y(L) = -EI u^{(3)}(L) = -\frac{3}{8}mg. \quad (5.37)$$

Naloga

Dolgo lahko palico z dolžino L , ki je na obeh koncih vrtljivo vpeta, obremenimo z vzdolžno silo F . Pri kolikšni sili se palica ukrivi? (Eulerjeva nestabilnost)

Palica naj leži vzdolž osi z , sila F na konec pri $z = L$ ima smer $-z$. Opravka imamo s končno vzdolžno silo, F_z v enačbah (5.9) in (5.10). Prečne sile v palici v splošnem ne poznamo (v tem primeru je sicer ničelna zaradi simetrije), vemo pa, da ni nobene dolžinsko porazdeljene sile. Zato uporabimo enačbo (5.10) in v njej upoštevamo, da je $\mathbf{K} = 0$ in seveda $F_z = \text{const}$. Odmik u torej določa enačba

$$EIu^{(4)} - F\ddot{u} = 0, \quad (5.38)$$

torej

$$u^{(4)} + k^2\ddot{u} = 0, \quad (5.39)$$

kjer smo vpeljali $k^2 = |F|/EI$. Enačbo rešimo tako, da vpeljemo funkcijo $v = \ddot{u}$. Rešitvi za v sta kosinus in sinus, u pa dobimo z dvakratno integracijo,

$$u = A + Bz + C \cos kz + D \sin kz. \quad (5.40)$$

Robni pogoji so $u(0) = \ddot{u}(0) = u(L) = \ddot{u}(L) = 0$, saj vrtljivo vpetje ne dovoljuje odmika in na konca ne deluje z navorom. Iz prvih dveh sledi $A = C = 0$, nato pa še $B = 0$ in

$$D \sin kL = 0. \quad (5.41)$$

Netrivialna rešitev $u \neq 0$ obstaja, ko je $kL = \pi$ (ostale $kL = (2n + 1)\pi$) niso fizikalne), njena amplituda pa v prvem redu u ni določena,

$$u = D \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right). \quad (5.42)$$

Kritična sila, nad katero je ravna oblika palice nestabilna, je torej

$$F_c = \pi^2 \frac{EI}{L^2}. \quad (5.43)$$

Naloga

Enaka naloga, le da je palica spodaj togo, zgoraj pa vrtljivo vpeta.

Zaradi nesimetričnosti problema se v palici tokrat pojavi tudi prečna sila. Pri gornjem postopku reševanja to nič ne vpliva, saj enačba (5.10) še vedno velja. Pri morebitnih alternativnih postopkih pa je na to treba paziti.

Robni pogoji so tokrat $u(0) = \dot{u}(0) = u(L) = \ddot{u}(L) = 0$. Netrivialna rešitev (5.40) obstaja, ko je

$$\tan kL = kL. \quad (5.44)$$

Grafično vidimo, da je presečišče premice $f(x) = x$ in funkcije $f(x) = \tan x$ malo pod $x = 3\pi/2$. Enačbo lahko enostavno rešimo iterativno – dve iteraciji zadostujeta za natančnost, boljšo od promila. Iterirati je treba v obratni smeri in zaradi periodičnosti tangensa vsakič prišteti π ,

$$kL = \arctan kL + \pi \approx 4.49. \quad (5.45)$$

Kritična sila je, razumljivo, nekoliko večja kot prej,

$$F_c = 4.49^2 \frac{EI}{L^2}. \quad (5.46)$$

Naloga

Še primer, ko je palica spodaj togo vpeta, zgoraj pa prosta.

Palica naj leži vzdolž osi z z vpetim krajiščem v izhodišču, sila F na prosti konec pri $z = L$ ima smer $-z$. Na prostem koncu ne deluje prečna sila, tako da je le-ta ničelna po celi palici (enačba (5.1)). Tokrat bo zato najbolje uporabiti enačbo (5.9), v kateri nastopa prečna sila. Ker te ni, za odmik u velja

$$0 = -EIu^{(3)} + F\dot{u}, \quad (5.47)$$

torej

$$u^{(3)} + k^2\dot{u} = 0, \quad (5.48)$$

kjer smo spet vpeljali $k^2 = |F|/EI$. Enačbo rešimo tako, da vpeljemo funkcijo $v = \dot{u}$. Rešitvi za v sta kosinus in sinus, u pa dobimo z integracijo,

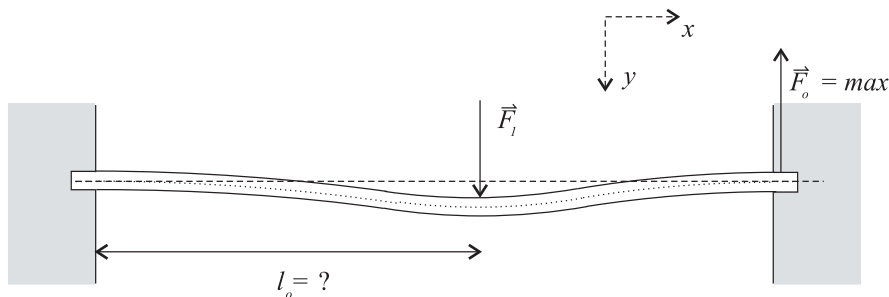
$$u = A + B \cos kz + C \sin kz. \quad (5.49)$$

Robni pogoji so $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ na vpetem in $\ddot{u}(L) = 0$ na prostem koncu. Sledi $C = 0$, $B = -A$ in $B \cos kL = 0$. Netrivialna rešitev $u \neq 0$ obstaja, ko je $kL = \pi/2$ (ostale $kL = 2\pi, 3\pi, \dots$) niso fizikalne). Kritična sila, nad katero je ravna oblika palice nestabilna, je torej

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}. \quad (5.50)$$

Naloga

Lahko palico dolžine L togo vpnemo na obeh krajiščih tako, da sta obe krajišči na isti višini. Palica je v obeh krajiščih vodoravna. Na kateri razdalji l_0 od levega krajišča moramo palico pritisniti s silo dane velikosti F_0 , da bo navor v desnem krajišču največji?



Slika 5.7: Lahko palico togo vpnemo na obeh krajiščih ter obremenimo s prečno silo.

ZBRISI F0 S SLIKE in SPREMENI F1 v F0!!!

Na palico ne deluje dolžinsko porazdeljena sila, zato uporabimo enačbo (5.11),

$$EIu^{(4)} = 0. \quad (5.51)$$

Spomnimo, da je vzdolžna sila v palici, ki se zaradi togega vpetja pojavi ob upogibu, višjega reda v odmiku in zato zanemarljiva. Zaradi diskretne sile F_0 ima sila v palici in s tem $u^{(3)}$ skok, zato rešitev sestavimo iz dveh delov, $u_1(x)$ za $0 \leq x < l_0$ in $u_2(x)$ za $l_0 < x \leq L$. Rešitvi enačbe (5.51) sta

$$u_1(x) = A_1 + B_1x + \frac{C_1}{2}x^2 + \frac{D_1}{3}x^3, \quad (5.52)$$

$$u_2(x) = A_2 + B_2(x-L) + \frac{C_2}{2}(x-L)^2 + \frac{D_2}{3}(x-L)^3, \quad (5.53)$$

pri čemer smo u_2 brez škode zapisali tako, da bo robni pogoj na desnem koncu analogen tistemu na levem: $u_1(0) = \dot{u}_1(0) = u_2(L) = \dot{u}_2(L) = 0$. Odtod takoj sledi $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$. Ostali štirje pogoji nastopajo pri $x = l_0$. Odmik ter njegov prvi in drugi odvod morajo biti zvezni, torej $u_1(l_0) = u_2(l_0)$, $\dot{u}_1(l_0) = \dot{u}_2(l_0)$, $\ddot{u}_1(l_0) = \ddot{u}_2(l_0)$, saj navor (torej drugi odvod) nima skoka, posledično pa sta zvezna tudi prvi odvod in odmik. Zaradi diskretne sile pa mora pri $x = l_0$ veljati še

$$F_2 - F_1 = -F_0, \quad (5.54)$$

torej

$$-u_2^{(3)}(l_0) + u_1^{(3)}(l_0) = -F_0/EI. \quad (5.55)$$

Dobimo linearni sistem za koeficiente C_1 , C_2 , D_1 in D_2 ,

$$\begin{aligned} C_1 + 2D_1l_0 &= C_2 + 2D_2(l_0 - L), \\ C_1l_0^2/2 + D_1l_0^3/3 &= C_2(l_0 - L)^2/2 + D_2(l_0 - L)^3/3, \\ C_1l_0 + D_1l_0^2 &= C_2(l_0 - L) + D_2(l_0 - L)^2, \\ 2D_1 - 2D_2 &= -F_0/EI, \end{aligned}$$

z rešitvijo

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{F_0 l_0(L - l_0)^2}{EI L^2}, \\ C_2 &= \frac{F_0 l_0^2(L - l_0)}{EI L^2}, \\ D_1 &= -\frac{F_0 (L - l_0)^2(L + 2l_0)}{EI 2L^3}, \\ D_2 &= \frac{F_0 l_0^2(3L - 2l_0)}{EI 2L^3} \end{aligned}$$

Zanima nas navor (5.8) na desno krajišče,

$$M = EI\ddot{u}_2(L) = EIC_2 = F_0 \frac{l_0^2(L - l_0)}{L^2}, \quad (5.56)$$

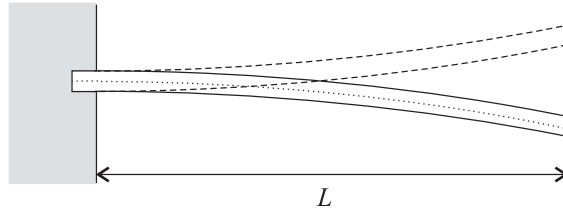
in sicer njegov maksimum glede na l_0 ,

$$\frac{dM}{dl} = 0 \Rightarrow l_0(2L - 3l_0) = 0. \quad (5.57)$$

Rešitev $l_0 = 0$ ustreza minimumu $M = 0$, maksimum navora pa je pri $l_0 = 2L/3$.

Naloga

Poiščimo lastna nihanja lahke homogene palice dolžine L , ki je na enem krajišču togo vpeta, na drugem pa je prosta.



Slika 5.8: Nihanje palice, ki je na enem krajišču togo vpeta, na drugem pa je prosta.

Ravnesni pogoj za palico (5.11) posplošimo v dinamično enačbo za odmik $u(x, t)$,

$$EIu^{(4)} - K = -\rho_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.58)$$

kjer je ρ_l masa na enoto dolžine. Da je vse, kot mora biti, vidimo, če si ogledamo poseben primer, ko ni elastične sile – takrat je, pravilno, $K = \rho_l \partial^2 u / \partial t^2$.

V našem primeru ni zunanje sile,

$$u^{(4)} + \frac{\rho_l}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5.59)$$

Z nastavkom

$$u(x, t) = v(x)e^{-i\omega t} \quad (5.60)$$

dobimo amplitudno enačbo

$$v^{(4)} - \alpha^4 v = 0, \quad (5.61)$$

kjer smo označili $\alpha^4 = \rho_l \omega^2 / EI$. Vidimo, da je rešitev oblike

$$v = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x + C \sin \alpha x + D \cos \alpha x. \quad (5.62)$$

Na vpetem koncu zahtevamo $v(0) = \dot{v}(0) = 0$, na prostem pa $\ddot{v}(L) = v^{(3)}(L) = 0$, saj tam ni ne sile ne navora. Iz prvih dveh pogojev dobimo $B + D = A + C = 0$, iz drugih dveh pa

$$A (\operatorname{sh} \alpha L + \sin \alpha L) + B (\operatorname{ch} \alpha L + \cos \alpha L) = 0,$$

$$A (\operatorname{ch} \alpha L + \cos \alpha L) + B (\operatorname{sh} \alpha L - \sin \alpha L) = 0.$$

Netrivialna rešitev obstaja, ko je

$$(\operatorname{sh} \alpha L + \sin \alpha L)(\operatorname{sh} \alpha L - \sin \alpha L) - (\operatorname{ch} \alpha L + \cos \alpha L)^2 = 0, \quad (5.63)$$

od koder z upoštevanjem identitete $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ sledi

$$\operatorname{ch} \alpha L \cos \alpha L = -1. \quad (5.64)$$

Prvih nekaj rešitev je $\xi \equiv \alpha L \approx 1.875, 4.694, 7.855, \dots$. Če pogoj (5.64) zapišemo v obliki

$$\cos \alpha L = -\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha L}, \quad (5.65)$$

vidimo, da se višje rešitve hitro bližajo ničlam kosinusa,

$$\xi_n = \alpha_n L \rightarrow \frac{(2n+1)}{2} \pi, \quad (5.66)$$

saj obratna vrednost hiperboličnega kosinusa hitro (eksponentno) pada proti nič. Iz enačbe (5.63) ali (5.64) lahko izračunamo še krajevno sliko lastnega nihajnega načina,

$$v(x) = A \left[\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x - \frac{\operatorname{sh} \alpha L + \sin \alpha L}{\operatorname{ch} \alpha L + \cos \alpha L} (\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x) \right]. \quad (5.67)$$

Prvi trije nihajnih načini so predstavljeni na sliki 5.9.

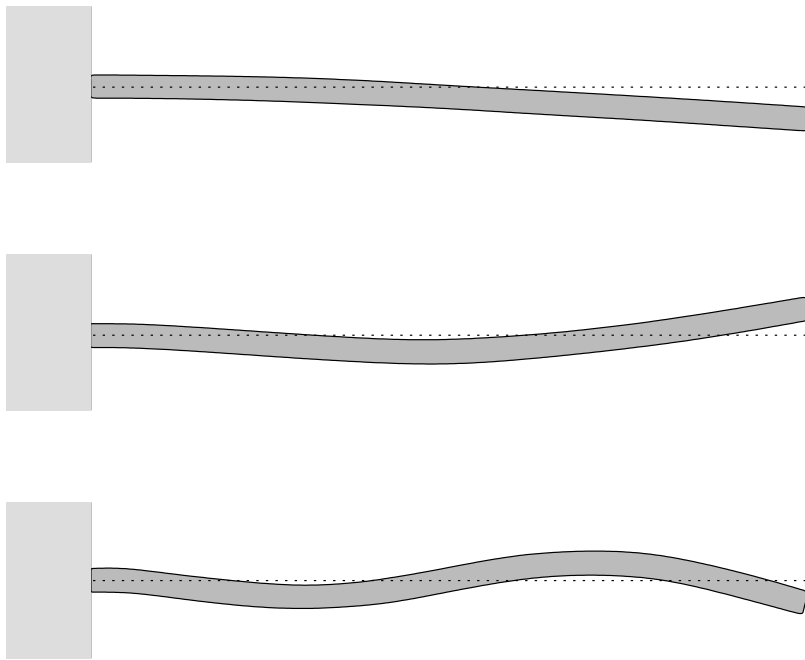
Pomembno je, da lastne frekvence,

$$\omega_n = \frac{\xi_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho l}}, \quad (5.68)$$

niso večkratniki osnovne frekvence ω_0 kot pri harmonskih sistemih (npr. pri napeti struni). Prva višja frekvenca je zelo visoko, šele pri $\omega_1 \approx 6.267\omega_0$ (pri napeti struni je $\omega_1 = 2\omega_0$), kar presenetljivo dobro velja tudi pri glasbenih vilicah. Zaradi simetrije kraka le-teh namreč nihata, kot bi bila na koncu, kjer vilice držimo, togo vpeta. Tako se hkrati s tonom "a" s frekvenco $\nu_0 = 440$ Hz za kratek čas oglasi tudi visok ton s frekvenco okrog $\nu_1 = 2760$ Hz, kar ustreza intervalu $12 \log_2 \frac{2760}{440} = 12 \cdot 2.65$ poltonov ali pregledneje, intervalu dveh oktav in 7.8 poltonov (in je najbližje tonu "f"). Če vilic ne prislonimo neposredno k ušesu, slišimo praktično le ta ton (in celo še naslednjega z ν_2 , ki se tudi dobro ujema z izračunanim), ker zaradi manjše valovne dolžine dosti učinkoviteje seva od osnovnega, ki je zato v daljnem polju praktično neslišen ... Višja lastna nihanja pa hitro zamrejo, tako da vilice vendarle kmalu zvenijo s čistim sinusnim (brezbarvnim) tonom "a", ki ga brez težav slišimo v bližnjem polju. Tako lahko instrumentalist uglaši svoj instrument in pevec diskretno poišče intonacijo, ne da bi pri tem motil soizvajalce ali poslušalce.

Naloga

Jekleno kitarško E struno premera $2R = 0.25$ mm in dolžine $l = 0.8$ m uglasimo na osnovno frekvenco $\nu_0 = 660$ Hz. Zapišimo izraz za relativno odstopanje lastnih frekvenc te strune



Slika 5.9: Prvi trije nihajni načini palice.

od harmonikov idealne strune zaradi upogibne elastičnosti. Upoštevajmo, da je odstopanje majhno in da je struna v dobrem približku na obeh koncih vrtljivo vpeta. Za koliko procentov odstopa prva oktava (dvakratnik osnovne frekvence) in za koliko tretja (osemkratnik osnovne frekvence)? Gostota jekla je $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, prožnostni modul pa $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.

Dinamična enačba (5.58) z dodatnim členom v primeru vzdolžne sile iz enačbe (5.10),

$$EIu^{(4)} - F\ddot{u} = -\rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.69)$$

poleg upogibnega valovanja opiše tudi običajno valovanje na struni, napeti s silo F . Nastavek

$$u(x, t) = u_0 \sin kx e^{-i\omega t}, \quad (5.70)$$

pri čemer so dovoljeni valovni vektorji $k_n = (n + 1)\pi/l$, zadošča tako enačbi (5.69) kot robnim pogojem (ničelna odmik in njegov drugi odvod) in vodi do disperzijske relacije

$$k_n^4 + \frac{F}{EI} k_n^2 = \frac{\rho l}{EI} \omega^2 \quad (5.71)$$

in tako do

$$\omega = ck_n \sqrt{1 + \frac{EI}{F} k_n^2} \approx \omega_n \left(1 + \frac{1}{2} \frac{EI}{F} k_n^2 \right), \quad (5.72)$$

kjer je $c = \sqrt{F/\rho_l}$ hitrost valovanja na napeti struni in $\omega_n = ck_n$ ustrezna lastna frekvenca idealne strune. Relativno odstopanje lastnih frekvenc od lastnih frekvenc idealne strune je torej

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{2} \frac{EI}{F} \frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2}. \quad (5.73)$$

Izračunajmo še, s kolikšno silo mora biti napeta struna brez upoštevanja elastičnosti, da bo njena osnovna frekvenca $\nu = 660$ Hz:

$$F = \frac{\rho_l \omega_0^2}{k_0^2} = 4\pi\rho R^2 l^2 \nu^2 = 107 \text{ N}. \quad (5.74)$$

Če upoštevamo še vztrajnostni moment (5.14) za krožni presek strune, končno dobimo

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = 2.76 \cdot 10^{-6} (n+1)^2. \quad (5.75)$$

Drugi harmonik ($n = 1$) torej od oktave odstopa za 0.0011%, osmi ($n = 7$) pa že za 0.018%.

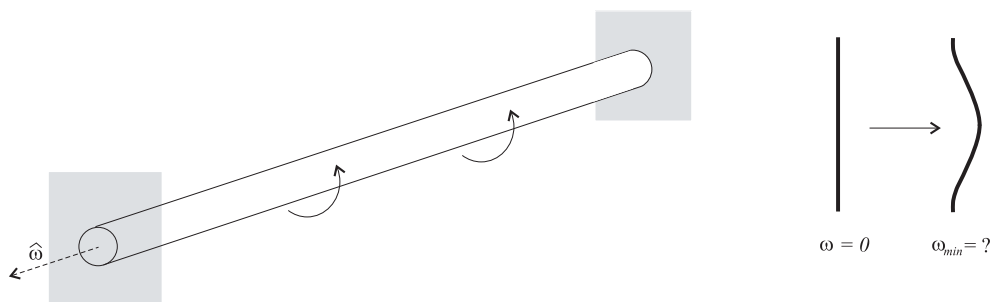
Morda smo opazili, da pri dani frekvenci ω disperzijski relaciji (5.71) poleg k_n^2 zadošča tudi

$$k^2 = -\frac{1}{2} \frac{F}{EI} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{EI\rho_l}{F^2} \omega^2} \right]. \quad (5.76)$$

Ta velik in imaginaren $k = iq$ ustreza rešitvama z eksponentnim krajevnim potekom ($\cosh qx$ in $\sinh qx$), ki pa pri naših robnih pogojih ne nastopata. Pri splošnih robnih pogojih sta znatni le blizu robov (ker je k zelo velik) in poskrbita, da je robnim pogojem moč zadostiti (npr. pri togem vpetju, ki ga samo z rešitvijo (5.70) ne moremo opisati).

Naloga

Dolgo tanko palico z okroglim presekom togo vpnemo na obeh krajiščih in jo zavrtimo okoli simetrijske osi. Pri kateri kotni hitrosti ω se palica ukrivi?



Slika 5.10: Palico zavrtimo okrog simetrijske osi.

Preselimo se v vrteči sistem. Dolžinsko porazdeljena centrifugalna sila na palico je

$$K = \rho_l \omega^2 u, \quad (5.77)$$

kjer je ρ_l masa palice na enoto dolžine, u pa njen odmik. Od rešitev ravnovesne enačbe (5.11),

$$u^{(4)} - \alpha^4 u = 0, \quad (5.78)$$

kjer je $\alpha^4 = \rho_l \omega^2 / EI$, vzamemo tokrat le tiste, ki so sode glede na sredino palice pri $x = 0$,

$$u = A \cos \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x. \quad (5.79)$$

Potem zadostujeta robna pogoja na eni strani, $u(L/2) = \dot{u}(L/2) = 0$. Netrivialna rešitev obstaja, ko je

$$\cos \frac{\alpha L}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha L}{2} + \sin \frac{\alpha L}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha L}{2} = 0, \quad (5.80)$$

torej

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} = -\operatorname{th} \frac{\alpha L}{2} \quad (5.81)$$

z rešitvijo $\xi \equiv \alpha L/2 \approx 2.365$. Palica se ukrivi pri

$$\omega = \frac{4\xi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_l}}. \quad (5.82)$$

V linearnem redu u netrivialna rešitev obstaja le pri tej kotni hitrosti, njena amplituda pa v tem redu ni določena. Če je kotna hitrost manjša od kritične, obstaja le trivialna rešitev $u(x) = 0$, če je večja, pa je treba poseči po višjih redih.

6. Elastično valovanje

6.1 Valovanje v neomejenem sredstvu

Dinamično Navierovo enačbo (2.8) preoblikujemo z uporabo identitete $\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ tako, da v njej nastopata rotor in divergenca:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(-\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right). \quad (6.1)$$

Upoštevali smo tudi $\mathbf{f} = 0$. Po Helmholtzovem izreku (1.32) lahko nastavek ravnih valov

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.2)$$

kjer je \mathbf{u} odmik delov sredstva pri valovanju, brez izgube splošnosti razdelimo na brezizvirni in brezvrtnični del, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L$, torej

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_{T0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_T = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{T0} = 0, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_{L0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \nabla \times \mathbf{u}_L = i\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{L0} = 0. \quad (6.4)$$

Vidimo, da je \mathbf{u}_{T0} pravokoten na valovni vektor – to bo torej transverzalni val. Nasprotno je \mathbf{u}_{L0} vzporeden valovnemu vektorju in bo tako longitudinalni val.

Ko vstavimo \mathbf{u} v Navierovo enačbo (6.1), vidimo, da divergenco preživi le \mathbf{u}_L , rotor pa le \mathbf{u}_T . Če še enkrat uporabimo zgornjo vektorsko identiteto, dobimo

$$\rho(\ddot{\mathbf{u}}_T + \ddot{\mathbf{u}}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\nabla^2 \mathbf{u}_T + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \nabla^2 \mathbf{u}_L \right), \quad (6.5)$$

torej

$$\rho(-\omega_T^2 \mathbf{u}_{T0} - \omega_L^2 \mathbf{u}_{L0}) = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(-k^2 \mathbf{u}_{T0} - \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} k^2 \mathbf{u}_{L0} \right). \quad (6.6)$$

Pri danem k sta valovanji \mathbf{u}_{T0} in \mathbf{u}_{L0} pravokotni, tako da lahko zapišemo ločeni enačbi,

$$-\rho \omega_T^2 \mathbf{u}_{T0} = -\frac{E}{2(1+\sigma)} k^2 \mathbf{u}_{T0} \Rightarrow \omega_T^2 = \underbrace{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}_{c_T^2} k^2, \quad (6.7)$$

$$-\rho \omega_L^2 \mathbf{u}_{L0} = -\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} k^2 \mathbf{u}_{L0} \Rightarrow \omega_L^2 = \underbrace{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}_{c_L^2} k^2, \quad (6.8)$$

katerih rešitvi sta hitrost transverzalnega

$$c_T^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \quad (6.9)$$

in hitrost longitudinalnega

$$c_L^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad (6.10)$$

valovanja. Njuno razmerje je

$$\frac{c_T^2}{c_L^2} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}, \quad 0 < \frac{c_T^2}{c_L^2} < \frac{1}{2}, \quad (6.11)$$

saj je Poissonovo razmerje za vse snovi med 0 in 1/2.

Zaradi preglednosti zapišimo še valovni enačbi obeh valovanj – videli smo, da sta neodvisni,

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_T - c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}_T = 0, \quad (6.12)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_L - c_L^2 \nabla^2 \mathbf{u}_L = 0, \quad (6.13)$$

zaradi kompletnosti pa še Navierovo enačbo (6.1) s snovnimi parametroma c_T in c_L namesto E in σ ,

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_T^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + c_L^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (6.14)$$

Naloga

Longitudinalno valovanje pod kotom α_0 vpada na ravno mejo med sredstvoma. Zapišimo odbojni in lomni zakon ter izračunajmo amplitude prepuščenih in odbitih valov.

Meja med sredstvoma 1 in 2 naj bo ravnina $x = 0$, vpadna ravnina pa ravnina $z = 0$. Vpadno longitudinalno valovanje se širi po sredstvu 1 pod kotom α_0 glede na os x . Izkaže se, da v splošnem poleg odbitega in lomljenega longitudinalnega vala dobimo tudi odbiti in lomljeni transverzalni val s polarizacijo v ravnini xy . Iz simetrije vidimo, da valovanje le ene vrste dobimo samo v primeru pravokotnega vpada (longitudinalnega ali transverzalnega valovanja) in vpada transverzalnega valovanja (pod poljubnim kotom), pri katerem polarizacijska ravnina sovpada z mejno ravnino. Če bi upoštevali le valovanje ene vrste, v splošnem ne bi mogli zadostiti pogoju na mejni ravnini.

V prvem sredstvu imamo vpadno longitudinalno valovanje ter odbiti longitudinalno in transverzalno,

$$\mathbf{u}_1 = (A_0 \mathbf{a}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + A_L \mathbf{a}_L e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}} + A_T \mathbf{a}_T e^{i\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}, \quad (6.15)$$

v drugem pa prepuščeni longitudinalno in transverzalno,

$$\mathbf{u}_2 = (B_L \mathbf{b}_L e^{i\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{r}} + B_T \mathbf{b}_T e^{i\mathbf{q}_T \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}, \quad (6.16)$$

kjer so A_i in B_i amplitude valov, \mathbf{a}_i in \mathbf{b}_i pa enotski smerni vektorji odmikov. Odmiki transverzalnih valovanj ležijo v vpadni ravnini. Smeri valovnih vektorjev \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_L , \mathbf{k}_T , \mathbf{q}_L in \mathbf{q}_T so po vrsti α_0 , α_L , α_T , β_L in β_T glede na os x . Rešitvi \mathbf{u}_1 in \mathbf{u}_2 se morata ujematii na celi mejni ravnini in ob vsakem trenutku. Slednje je možno le, če so frekvence vseh valov enake, kar smo v (6.15) in (6.16) že upoštevali. Iz zahteve po krajevnem ujemanju pri $x = 0$ (pomembna je le koordinata y , saj v smeri z ni nobene odvisnosti) pa za vsak y sledi

$$\begin{aligned} A_0 \mathbf{a}_0 e^{i \frac{\omega}{c_{1L}} \sin \alpha_0 y} + A_L \mathbf{a}_L e^{i \frac{\omega}{c_{1L}} \sin \alpha_L y} + A_T \mathbf{a}_T e^{i \frac{\omega}{c_{1T}} \sin \alpha_T y} = \\ B_L \mathbf{b}_L e^{i \frac{\omega}{c_{2L}} \sin \beta_L y} + B_T \mathbf{b}_T e^{i \frac{\omega}{c_{2T}} \sin \beta_T y}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

kjer smo velikosti valovnih vektorjev izrazili s hitrostmi longitudinalnih in transverzalnih valovanj v obeh sredstvih, projekcije v smeri y pa s koti. Potrebni pogoj za veljavnost (6.17) je, da so vsi eksponenti enaki, kar vodi do običajnega odbojnega,

$$\frac{\sin \alpha_i}{c_{1i}} = \frac{\sin \alpha_0}{c_{1L}}, \quad (6.18)$$

in običajnega lomnega,

$$\frac{\sin \beta_i}{c_{2i}} = \frac{\sin \alpha_0}{c_{1L}}, \quad (6.19)$$

zakona. Ker sta c_L in c_T različni, odbojni kot transverzalnega valovanja ni enak vpadnemu, prav tako pa se lomljeni valovanji širita v različnih smereh. Odbojno-lomni zakon je seveda povsem analogen tudi v primeru, ko vpada transverzalno valovanje. Na kratko torej: razmerje med sinusom kota proti vpadni pravokotnici in hitrostjo valovanja je za vse valove enako.

Več dela je z amplitudami. Oglejmo si le preprostejši posebni primer, ko sredstva 2 ni in se vpadno valovanje le odbija od meje z "vakuumom" (v praksi pa seveda od meje s sredstvom z mnogo nižjo impedanco, npr. zrakom), prepuščenega valovanja pa ni,

$$\mathbf{u} = (A_0 \mathbf{a}_0 e^{i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + A_L \mathbf{a}_L e^{i \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}} + A_T \mathbf{a}_T e^{i \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}}) e^{-i \omega t}. \quad (6.20)$$

Odbito transverzalno valovanje je polarizirano v vpadni ravnini, izberimo še smer: $\mathbf{a}_T = (\mathbf{k}_T/k_T) \times \hat{\mathbf{e}}_z$. Odmike longitudinalnih valov definirajmo v smeri valovnih vektorjev, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{k}_0/k_0$, $\mathbf{a}_L = \mathbf{k}_L/k_L$. Meja je ravnina $x = 0$, longitudinalno valovanje vpada v ravnini xy . Na mejo ne deluje nobena sila, zato mora tam veljati $p_{ix} = 0$. p_{zx} je avtomatsko ničeln, ker je $u_{zx} = 0$. Ostali komponenti izrazimo z u_{xx} in u_{yy} prek Hookovega zakona (2.6), ki ga priročno zapišemo s hitrostma:

$$p_{ij} = 2\rho c_T^2 u_{ij} + \rho(c_L^2 - 2c_T^2) u_{kk} \delta_{ij}. \quad (6.21)$$

Upošteevamo $\alpha_L = \alpha_0$ ter $\sin \alpha_T/c_T = \sin \alpha_0/c_L$ in izračunamo (izpuščamo eksponentne faktorje, za katere smo pravkar poskrbeli)

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = i k_0 (A_0 + A_L) \cos^2 \alpha_0 - i k_T A_T \sin \alpha_T \cos \alpha_T, \\ u_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = i k_0 (A_0 - A_L) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \frac{1}{2} k_T A_T (\sin^2 \alpha_T - \cos^2 \alpha_T), \\ u_{kk} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{a}_0 A_0 + i \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{a}_L A_L = i (A_0 + A_L) k_0 \end{aligned}$$

ter s Hookovim zakonom (6.21) izrazimo p_{xx} in p_{yx} in zahtevamo, da sta ničelna. Rezultat je

$$A_L = A_0 \frac{c_T^2 \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_T - c_L^2 \cos^2 2\alpha_T}{c_T^2 \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_T + c_L^2 \cos^2 2\alpha_T}, \quad (6.22)$$

$$A_T = A_0 \frac{2c_L c_T \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha_T}{c_T^2 \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_T + c_L^2 \cos^2 2\alpha_T}. \quad (6.23)$$

Preverimo še limitni primer. Pri pravokotnem vpadu $\alpha_0 = 0$ ni odbitega transverzalnega valovanja, po analogiji z odbojem valovanja na prostem koncu napete strune pa pričakujemo, da se bo longitudinalno tudi v našem primeru odbilo z isto fazo. Za $\alpha_0 = 0$ dobimo $A_T = 0$ in $A_L = -A_0$. Slednje res predstavlja odboj z isto fazo, saj smo odmika \mathbf{a}_0 in \mathbf{a}_L definirali v nasprotnih smereh.

6.2 Rayleighovi površinski valovi

Ti elastični valovi se širijo po površini telesa (valovni vektor je vzporeden s površino) in ne prodirajo globlje v snov. Poiščimo take rešitve enačb (6.12) in (6.13), ki ustrezajo površinskim valovom. Površina elastičnega telesa naj bo neomejena in ravna in naj sovpada z ravnino xy , telo pa leži pod to ravnino (torej pri $z < 0$). Raven površinski val, ki se širi vzdolž osi x , zapišemo kot

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{i(kx - \omega t)} f(z), \quad (6.24)$$

kjer je \mathbf{u} lahko bodisi transverzalen bodisi longitudinalen val. Ko ta nastavek vnesemo v eno od valovnih enačb (6.12) ali (6.13), dobimo enačbo za funkcijo $f(z)$,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f = 0, \quad (6.25)$$

kjer je c ena izmed hitrosti c_T ali c_L . Če je $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$, nas enačba pripelje do periodičnih rešitev v smeri osi z , kar ustreza ravnim valovom z neničelno z komponento valovnega vektorja. Tokrat pa nas zanima druga možnost, torej $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$. V tem primeru je rešitev oblike

$$f(z) \propto e^{\pm z \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}. \quad (6.26)$$

Rešitev z znakom minus bi pomenila neomejeno večanje amplitude valovanja, ko prodira globlje v telo ($z \rightarrow -\infty$). Ta rešitev je očitno nesmiselna, zato se bomo zanimali samo za rešitev z znakom plus v eksponentu. Torej velja

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{\kappa z}, \quad \text{kjer je } \kappa = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (6.27)$$

Rešitev (6.27) ustreza valu, katerega amplituda eksponentno pojema z oddaljenostjo od površine, torej takemu, ki se širi le ob površini. Pri prostorskih valovih v neomejenem sredstvu se transverzalni \mathbf{u}_T in longitudinalni \mathbf{u}_L val širita neodvisno. Pri površinskih valovih pa delite na dva neodvisna dela ni mogoča zaradi robnih pogojev na površini telesa. Vektor deformacije \mathbf{u} je v tem primeru točno določena linearna kombinacija vektorjev \mathbf{u}_T in \mathbf{u}_L .

Ker na prosto površino ne delujejo zunanje sile, mora veljati $p_{iz}n_z = 0$, torej $p_{xz} = p_{yz} = p_{zz} = 0$. S Hookovim zakonom (2.7) potem sledi

$$u_{xz} = 0, \quad (6.28)$$

$$u_{yz} = 0, \quad (6.29)$$

$$\sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_{zz} = 0. \quad (6.30)$$

Potrebni pogoj za veljavnost (6.30) ob vsakem času in pri vseh x na mejni površini je enakost ω in k za obe polarizaciji, transverzalno in longitudinalno. Odtod tudi sledi, da sta atenuacijska koeficienta različna: κ_T in κ_L . Iz enačbe (6.27) preberemo, da so vse komponente \mathbf{u} in s

¹Izpeljava je povzeta po knjigi L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, Butterworth and Heinemann, Oxford, 1998.

tem tudi komponente u_{ij} neodvisne od koordinate y , zato iz (6.29) sledi zveza

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (6.31)$$

z upoštevanjem (6.27) pa končno $u_y = 0$. Odmiki torej ležijo v ravnini, ki jo določata smer širjenja valovanja (os x) in normala na površino.

Za transverzalni val iz pogoja (6.3) sledi

$$iku_{Tx} + \kappa_T u_{Tz} = 0, \quad \frac{u_{Tx}}{u_{Tz}} = -\frac{\kappa_T}{ik}. \quad (6.32)$$

Obe komponenti odmika lahko zato izrazimo z isto konstanto, označimo jo z a : $u_{Tx} = \kappa_T a e^{ikx + \kappa_T z - i\omega t}$ in $u_{Tz} = -ik a e^{ikx + \kappa_T z - i\omega t}$.

Podobno za longitudinalni val iz pogoja (6.4) sledi

$$iku_{Lz} - \kappa_L u_{Lx} = 0, \quad \frac{u_{Lx}}{u_{Lz}} = \frac{ik}{\kappa_L}. \quad (6.33)$$

Obe komponenti odmika lahko spet izrazimo z isto konstanto, označimo jo z b : $u_{Lx} = kb e^{ikx + \kappa_L z - i\omega t}$ in $u_{Lz} = -i\kappa_L b e^{ikx + \kappa_L z - i\omega t}$.

Konstanti a in b bomo določili iz pogojev (6.28) in (6.28). Če upoštevamo $u_y = 0$ in izrazimo σ s c_T in c_L , sledi

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad (6.34)$$

$$c_L^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \quad (6.35)$$

Odmik zapišemo kot linearno superpozicijo transverzalne in longitudinalne polarizacije, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L$. Iz (6.34) tako dobimo

$$a(k^2 + \kappa_T^2) + 2bk\kappa_L = 0, \quad (6.36)$$

iz (6.35) pa sledi

$$2ac_T^2\kappa_T k + b[c_L^2(\kappa_L^2 - k^2) + 2c_T^2 k^2] = 0. \quad (6.37)$$

Če upoštevamo zvezo $k^2 - \kappa_i^2 = \frac{\omega^2}{c_i^2}$, lahko enačbo (6.37) zapišemo v obliki

$$2a\kappa_T k + b(k^2 + \kappa_T^2) = 0. \quad (6.38)$$

Sistem enačb (6.36) in (6.38) je netrivialno rešljiv le tedaj, ko je njegova determinanta enaka nič. Tako dobimo pogoj $(k^2 + \kappa_T^2)^2 = 4k^2\kappa_T\kappa_L$. Če ta pogoj kvadriramo in vnesemo vrednosti κ_T^2 in κ_L^2 , dobimo enačbo, ki povezuje k in ω :

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}\right). \quad (6.39)$$

Podroben pregled te enačbe pokaže, da mora biti k sorazmeren z ω . Zato bomo postavili

$$\omega = c_T k \xi$$

in poiskali tak ξ , da bo enačba (6.39) izpolnjena. S tem predelamo enačbo (6.39) v enačbo za ξ :

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_T^2}{c_L^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2}\right) = 0. \quad (6.40)$$

Odtod preberemo, da je ξ odvisen samo od razmerja $\frac{c_T}{c_L}$, kar je snovna konstanta, določena s Poissonovim številom:

$$\frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}}.$$

Če vstavimo zvezo $\omega = c_T k \xi$ v izraz $\kappa = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, sledi

$$\kappa_{T,L} = k \sqrt{1 - \xi^2 \frac{c_T^2}{c_{T,L}^2}}.$$

Ker želimo, da sta κ_L in κ_T realni števili, mora biti $\xi < 1$. Hkrati mora biti ξ tudi realno pozitivno število, saj sta tudi k in ω realni pozitivni števili. Enačba (6.40) ima samo eno rešitev, ki ustreza tem pogojem, zato vsaki vrednosti razmerja $\frac{c_T}{c_L}$ pripada ena vrednost ξ .

Tako kot za prostorske valove, je torej tudi za površinske valove frekvenca sorazmerna z valovnim številom – valovanje je brez disperzije. Hitrost površinskega (Rayleighovega) valovanja je tako

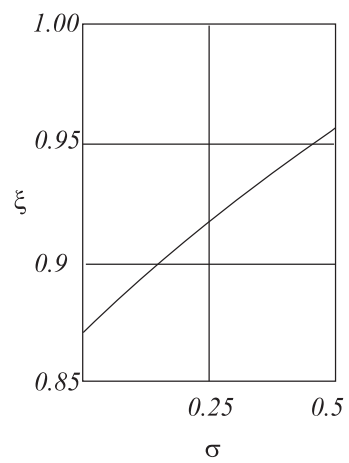
$$u = c_t \xi \quad (6.41)$$

in jo lahko izrazimo s hitrostma transverzalnih in longitudinalnih prostorskih valov, c_T in c_L .

Izračunajmo še razmerje amplitud obeh komponent valovanja. Iz enačb (6.38) in (6.39) sledi razmerje

$$\frac{a}{b} = -\frac{2 - \xi^2}{2\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Vrednost razmerja c_T/c_L leži med $1/\sqrt{2}$ in 0, kar ustreza Poissonovemu številu med 0 in $1/2$. Pri tem se ξ spreminja med 0,874 in 0,955, kot kaže slika 6.1.



Slika 6.1: Parameter ξ iz enačbe (6.40) kot funkcija parametra σ .