Poglavje 1

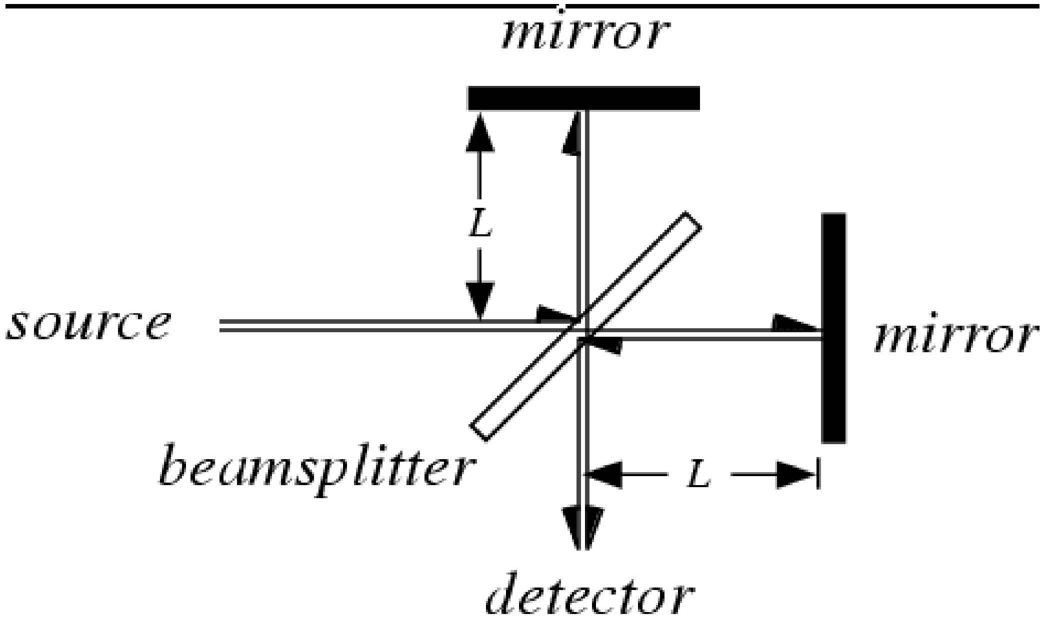
Posebna teorija relativnosti

Dvajseto stoletje je v fiziko prineslo dve revolucionarni novosti: Einsteinovo teorijo relativnosti in kvantno fiziko. Tako danes pravimo fiziki do konca 19. stoletja *klasična fizika*, relativistični in kvantni pojavi pa tvorijo *moderno fiziko.* To nikakor ne pomeni, da klasična fizika ni več uporabna, nasprotno, tudi v 20. stoletju je bilo z njo mogoče razložiti mnogo novih pojavov.

1.1 Zakaj klasična fizika ni dobra

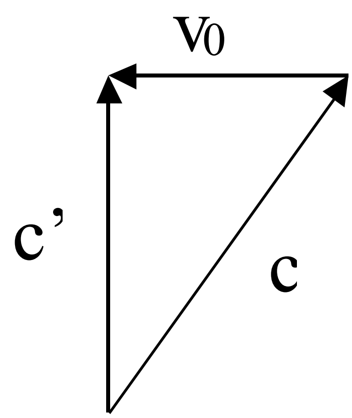
Ob koncu 19. stoletja, po odkritju Maxwellovih enačb elektrodinamike in elektromagnetnih valov, so se v fiziki pokazale določene težave. Hitrost svetlobe je v Maxwellovih enačbah konstanta, neodvisna od opazovalnega sistema. Po tedanjih izkušnjah z valovanji, kot so zvok, velja za hitrost valovnih čel, to je fazno hitrost, isto kot za hitrost delcev: če je hitrost valovanja v izbranem inercialnem opazovalnem sistemu S enaka c , mora biti v sistemu S', ki se glede na S giblje v pozitivni smeri s hitrostjo v_0, hitrost valovanja $c-v_0$. Vsa do tedaj znana valovanja so se širila po nekem sredstvu, zato so tudi za svetlobo predpostavljali, da se širi po *etru*, nekakšnem idealnem elastičnem mediju, skozi katerega se snovna telesa gibljejo brez upora. (V današnjem času se nam morda zdi to pojmovanje celo manj čudno kot v večjem delu dvajsetega stoletja: kozmologi so v zadnjih nekaj letih precej trdno prepričani, da je večina mase vesolja v obliki, ki z običajno snovjo ne sodeluje. To seveda z etrom nima zveze.)

Že Maxwell je razumel, da naj bi bilo načeloma mogoče hitrost Zemlje glede na eter meriti z merjenjem hitrosti svetlobe, vendar je menil, da bi bila zaradi zelo velike hitrosti svetlobe potrebna nedosegljivo velika natančnost. Albert Michelson pa se je meritve vseeno lotil. Izumil je nov interferometer, ki se danes nosi ime po njem in z njim izvedel poskus, s katerim je lahko dosegel potrebno natančnost.



Michelsonov interferometer

Enobarvna svetloba (rumena svetloba natrijeve svetilke) pada na polprepustno zrcalo in se na njem razdeli na dva kraka dolžine L. Na končnih zrcalih se žarka odbijeta in se po poprepustnem zrcalu zopet združita. Če se faza obeh delnih valov na detektorju razlikuje za mnogokratnik 2π, zaznamo interferenčni maksimum, sicer je signal manjši. Prepostavimo, da se Zemlja in z njo interferometer giblje glede na eter s hitrostjo v_0 v vodoravni smeri na skici. Tedaj bi morala svetloba za pot do vodoravnega zrcala in nazaj do polprepustnega zrcala porabiti



Slika˜1.1:

čas

$$t_1 = \frac{L}{c - v_0} + \frac{L}{c + v_0} = \frac{2\,L}{c}\,\frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

Hitrost Zemlje okoli Sonca je približno 3.10^4 km/s= $10^{-4}c$, tako da lahko imenovalec razvijemo:

$$t_1 = \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

Relativno podaljšanje časa preleta je le 10^{-8}. Tudi v prečnem kraku moramo upoštevati, da se inteferometer giblje glede na eter. Hitrost potovanja svetlobe v pravokotni smeri je tako (glej skico)

$$c' = \sqrt{c^2 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

in je čas preleta do prečnega zrcala in nazaj

$$t_2 = \frac{2\,L}{c'} = \frac{2\,L}{c}\frac{1}{\sqrt{c^2 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{2\,L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

Razlika časov preleta je tako

$$t_2 - t_1 = \delta t = \frac{L}{c}\frac{v_0^2}{c^2}$$

Fazna razlika med obema žarkoma na detektorju je

$$2\pi\,\nu\,\delta t = 2\pi\,\frac{L}{\lambda}\frac{v_0^2}{c^2}$$

Michelson je z dodatnimi zrcali v obeh krakih dosegel, da je bila dolžina poti $L = 11$ m, valovna dolžina je bila 6.10^{-7} m, kar da fazno razliko $0,4\,\pi$ ali 0,2 interferenčne proge.

Pri gornjem računu smo privzeli, da sta oba kraka enako dolga, kar je bilo s potrebno natančnostjo težko doseči. Michelson se je tej zahtevi izognil tako, da je med opazovanjem interferometer zavrtel za 90^o. S tem sta se vlogi obeh krakov zamenjali in Michelson je pričakoval, da se bo interferenčni vzorec premaknile za 0,4 proge, kar bi zlahka opazil. Vendar je bil rezultat meritve negativen, proge se sploh niso premaknile.

Michelsonov poskus, ki je bil kasneje z boljšo natančnostjo večkrat ponovljen, kaže presenstljivo dejstvo, da hitrost svetlobe ni odvisna od gibanja opazovalca.

Na to, da pri hitrostih, ki so primerljive s hitrostjo svetlobe, ne veljajo več klasične predstave, kažejo tudi drugi, kasnejši poskusi. Na tem mestu omenimo le dva.

Nestabilni elementarni delci razpadajo z razpadnim časom, ki je značilen za dane delce. Vendar delci, ki razpadajo in se pri tem gibljejo z veliko hitrostjo, živijo dlje kot isti delci, kadar ti mirujejo ali se gibljejo le počasi. To napeljuje na misel, da je nekaj narobe s kalsičnim pojmovanjem časa, ki naj bi tekel v vseh (inercialnih) opazovalnih sistemih enako.

Pri pospeševanju elektronov z napetostjo blizu milijon voltov so opazili, da končna hitrost ni $\sqrt{2eU/m}$, kot pričakujemo po Newtonovi mehaniki, temveč manj in se asimptotično približuje c.

1.2 Einsteinovi postulati in posledice

Einsteina je pri uvedbi posebne teorije relativnosti, ki pomeni povsem novo pojmovanje prostora in časa, vodilo predvsem nasprotje med zahtevo, da morajo biti zakoni fizike enaki v vseh inercialnih opazovalnih sistemih, in Maxwellovimi enačbami, po katerih je hitrost svetlobe konstanta, kar bi bilo po klasičnih predstavah možno le tako, da bi Maxwellove enačbe veljale le v posebnem sistemu, ki miruje glede na nekakšen eter. Na Michelsonov poskus se niti ni kaj dosti naslanjal. Tako je postavil dve zahtevi ali postulata:

1. Hitrost svetlobe je v vseh inercialnih sistemih enaka c.

2. Zakoni fizike imajo v vseh inercialnih sistemih enako obliko.

Druga zahteva je enaka kot v kalsični fiziki, prva pa je v skladu tako z Michelsonovo meritvijo kot z Maxwellovimi enačbami. Videli bomo, da so njene posledice zelo daljnosežne: prisilijo nas, da privzamemo novo pojmovanje prostora in časa.

1.2.1 Podaljšanje časa

V klasični fiziki je čas univerzalni parameter, ki teče v vseh opazovalnih sistemih in po vsem prostoru enako. Pokažimo, da zaradi gornjih zahtev čas ne more teči v vseh sistemih enako.

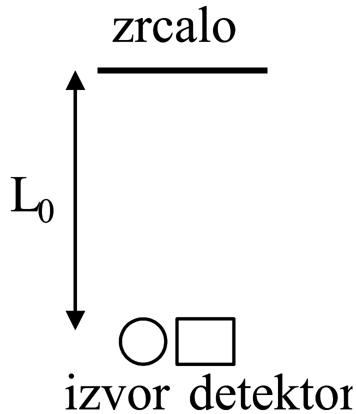
Zamislimo si napravo, nekakšno uro, ki jo kaže spodnja skica.

Izvor odda svetlobni sunek, ki se odbije od zrcala in se vrne do detektorja. Čas, ki ga porabi za prelet, lahko vzamemo za časovno enoto. Če želimo, lahko napravo dopolnimo, da deluje kot običajna ura. Vsakič, ko detektor zazna odbiti sunek, sproži izvor, da odda nov sunek. S štetjem sunkov tako merimo čas.

V inercialnem sistemu S, v katerem naprava miruje, je čas preleta

$$t_0 = \frac{2\,L_0}{c}$$

Vzemimo sedaj enako uro v sistemu S', ki se giblje v desno s hitrostjo v_0 glede na S. Za opazovalca v S se je v času $t/2$, ki ga sunek potrebuje,



Slika~1.2:

da pride do zrcala, to premaknilo za $t\,v_0/2$. Po prvem postulatu je hitrost svetlobe v S' tudi c, zato je

$$\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{L_0^2 + \left(\frac{t\,v_0}{2}\right)^2}}{c}$$

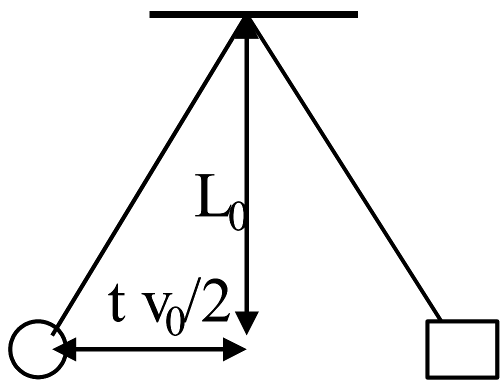
Od tod izračunamo čas preleta

$$t = \frac{2\,L_0}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \tag{1.1}$$

Povsem enaka ura, ki miruje v S', torej teče za opazovalca v S za faktor $\gamma_0 = \sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$ počasneje kot ura, ki miruje v S. Videli bomo, da γ_0 nastopa v mnogih izrazih relativnostne teorije, zato smo vpeljali poseben simbol. Zdi se sicer, da smo pojav *podaljšanja časa* dobili za merjenje z neko posebno uro, vendar poskusi kažejo, da velja za vsako uro.

Čas, ki ga kaže ura v sistemu, v katerem miruje, imenujemo *lastni čas* te ure.

Primer, ki daje neposredno potrditev izraza za podaljšanje časa, je razpad osnovnih delcev pionov v mirovanju in v letu. V mirovanju je



Slika˜1.3:

povprečni razpadni čas pionov $\tau = 2,6 \times 10^{-8}$s. Pionom, ki so nastali v tarči pospeševalnika protonov, so s časom preleta izmerili hitrost $2,74 \times 10^8$ m/s in razpadni čas v letu $\tau' = 6,38 \times 10^{-8}$ s. Razmerje razpadnih časov je bilo 2,45, iz hitrosti izračunani faktor γ_0 pa 2,46, kar se lepo ujema s formulo za podaljšanje časa.

1.2.2 Skrčenje dolžin

Druga posledica Einsteinovih postulatov je, da razdalja med dvema točkama v S in S' ni enaka. To spet lahko pokažemo z našo svetlobno uro. Obrnimo uro v S' za 90^o. Najprej privzemimo, da je razdalja med izvorom in zrcalom za opazovalca v S še vedno L_0. V času t_1 potovanja svetlobnega sunka do zrcala se je to premaknilo za $v_0\, t_1$, tako da je

$$t_1 = \frac{L_0 + v_0\, t_1}{c}$$

čas potovanja nazaj pa

$$t_2 = \frac{L_0 - v_0\, t_2}{c}$$

Tako bi bil čas preleta

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L_0}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{v_0}{c}} + \frac{1}{1+\frac{v_0}{c}}\right) = \frac{L_0}{c}\frac{1}{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$$

Dobili smo, da bi bil faktor podaljšanja časa za tako obrnjeno uro γ_0^2, kar ni v skladu s prejšnjim dognanjem in meritvami. Kako ura teče, tudi ne sme biti odvisno od njene orientacije. Tako moramo ugotoviti, da dolžina ure vzdolž smeri gibanja za opazovalca v S ni L_0, temveč se skrajša na

$$L = \frac{L_0}{\gamma_0} = L_0\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} \tag{1.2}$$

To je pojav *skrčenja dolžin*. Ker razsežnih teles ne moremo pospešiti do hitrosti, primerljive s svetlobno, ga ni mogoče preveriti z neposrednimi meritvami, kaže pa, da je tudi razdalja odvisna od tega, v katerem opazovalnem sistemu jo merimo. Razdalji med dvema točkama v sistemu, v katerem točki mirujeta, pravimo *lastna dolžina.*

Pri obeh pojavih, podaljšanju časa in skrčenju dolžin, sta sistema S in S' povsem enakopravna. Ura v S' teče počasi za opazovalca v S, obratno pa ura, ki miruje v S, teče počasi za opazovalca v S'. To je vidno iz tega, da je γ_0 odvisen le od v_0^2 in je seveda v skladu z zahtevo, da morajo biti vsi inercialni sistemi enakovredni.

1.3 Lorentzova transformacija

Obe dosedanji posledici Einsteinovih postulatov sta povezani z opazovanji v različnih inercialnih opazovalnih sistemih. Poglejmo sedaj, kakšna je splošna transformacija koordinat pri prehodu iz enega sistema v drugega.

Vemo, da za prehod med inercialnim sistemom S in inercialnim sistemom S', ki se giblje glede na S s hitrostjo v_0 v smeri osi x , v klasični fiziki velja Galilejeva transformacija (privzamemo, da ob $t = 0$ izhodišči sovpadata)

$$\begin{aligned} x' &= x - v_0\, t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.3}$$

Čas se seveda v klasični fiziki nikoli ne transformira in smo zadnjo enačbo dodali, ker že vemo, da se v relativistični fiziki tudi čas transformira. Galilejeva transformacija je linearna. Med najosnovnejšimi predpostavkami fizike je homogenost prostora, to je, da je prostor povsod enak. Zato mora biti vsaka transformacija med inercialnimi opazovalnimi sistemi linearna.

Iščemo tako transformacijo, ki bo zadoščala Einsteinovim zahtevam. Obenem vemo, da je za majhne hitrosti dobra Galilejeva transformacija, zato poskusimo z novo transformacijo koordinat oblike

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\,(x - v_0 t) \\ y' &= \eta\, y \\ z' &= \eta\, z \end{aligned}$$

Sistema S in S' morata biti po drugem postulatu enakovredna, zato mora imeti obratna transformacija enako obliko. Koeficient α mora biti funkcija v_0, ki ima pri $v_0 = 0$ vrednost 1, zato mora biti soda. Tako je obratna transformacija

$$\begin{aligned} x &= \alpha\,(x' + v_0 t') \\ y &= \eta\, y' \\ z &= \eta\, z' \end{aligned}$$

Ker mora biti $y = \eta\, y' = \eta^2 y$, je $\eta = \pm 1$. Pri majhnih hitrostih mora veljati Galilejeva trasnformacija, tako da mora biti $\eta = 1$. . Izračunajmo t' iz izraza za x in vstavimo še izraz za x', pa dobimo

$$t' = \frac{1}{v_0}\left(\frac{x}{\alpha} - x'\right) = \frac{x}{\alpha\, v_0} - \alpha\frac{x}{v_0} + \alpha\, t = \alpha\left(t - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 v_0} x\right)$$

α ne more biti 1, ker bi s tem dobili nazaj Galilejevo transformacijo. S tem smo dobili tudi enačbo za transformacijo časa, ugotoviti moramo le še, kakšen je koeficient α. Mislimo si, da se ob času $t = t' = 0$ v izhodišču izseva svetlobni blisk. V S bo čez čas t dosegel točko $x = c\,t$, v S' pa $x' = c\,t'$. Tu smo uporabili zahtevo, da je hitrost svetlobe v obeh sistemih enaka. Uporabimo še transformacijski pravili za x in x' in dobimo

$$c\,t = \alpha\,(x' + v_0 t') = \alpha\,(c + v_0)\,t'$$

in

$$c\,t' = \alpha\,(x - v_0 t) = \alpha\,(c - v_0)\,t$$

Postavimo t' iz druge enačbe v prvo, pa lahko izračunamo

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \gamma_0$$

α je torej kar γ_0, kar bi po izrazu za podaljšanje časa lahko tudi uganili.

Tako smo dobili *Lorentzovo transformacijo* za prehod med dvema inercialnima sistemoma:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_0 \left(t - \frac{v_0}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma_0 \left(x - v_0 t \right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ker je hitrost S glede na S' enaka $-v_0$, dobimo obratno transformacijo tako, da zamenjamo v_0 z $-v_0$.

Dobljeno transformacijo je odkril Hendrik Lorentz leta 1890. Ugotovil je, da so Maxwellove enačbe invariantne na to transformacijo, to je, ohranjajo enako obliko. Ker je po njih tudi hitrost svetlobe enaka c, zadoščajo Einsteinovim postulatom in so relativistično pravilne. Lorentz je še trdno verjel v eter in je smatral, da je transformacija le matematična posebnost Maxwellovih enačb in je ni povezal z lasnostmi prosotra in časa. To je storil šele Einstein leta 1905.

Pojavu, ki se zgodi na danem mestu ob danem času, to je četvorki (t, x, y, z), rečemo dogodek.

Iz Lorentzove transformacije sledita pojava podaljšanja časa in skrčenja dolžin. Naj ura miruje v S' na mestu x'. Časovni interval $\Delta t'$ je v S po obratni Lorentzovi transformaciji

$$\Delta t = \gamma_0 \left(\Delta t' + \frac{v_0}{c^2} \Delta x' \right)$$

Ker ura v S' miruje, je $\Delta x' = 0$ in je

$$\Delta t = \gamma_0 \Delta t'$$

torej se časovni interval v S podaljša, kot smo že ugotovili. Kaj pravzaprav to pomeni, si lahko nekoliko pojasnimo s primerom. Opazovalca v

S in S' se dogovorita, da bo ura, ki miruje v izhodišču S', eno sekundo (t'_0) potem, ko sta izhodišči sovpadali in sta uri v obeh izhodiščih kazali čas 0, oddala svetlobni signal. Opazovalec v izhodišču S zazna signal, ko njegova ura kaže

$$t_1 = \gamma_0 t'_0 + \frac{v_0}{c}\, t_0$$

Upoštevati smo morali, da je ura v S prepotovala razdaljo $v_0 t_0$. Tako je

$$t_1 = \gamma_0 t'_0 \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = t'_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}}} \tag{1.5}$$

Temu rezultatu bomo nekoliko kasneje lahko dali še drug pomen.

Tudi skrčenje dolžin lahko obravnavamo z Lorentzovo transformacijo. Vzemimo palico dolžine L_0, ki miruje v S'. Najprej moramo ugotoviti, kako je določena dolžina palice v S. V klasični fiziki, kjer je čas enak v vseh inercialnih sistemih, s tem ni bilo težav, razlika koordinat ob istem času je pri Galilejevi transformaciji neodvisna od koordinatnega sistema. Relativistično dobimo razdaljo med dverma dogodkoma kot razliko prostorskih koordinat ob istem času v izbranem koordinatnem sistemu. Po Lorentzovi transformaciji je

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma_0 \left(L_0 + v_0\, \Delta t'\right) \\ \Delta t &= \gamma_0 \left(\Delta t' + \frac{v_0}{c^2} L_0\right) \end{aligned}$$

Če naj Δx predstavlja dolžino palice v S, mora biti $\Delta t = 0$ in je $\Delta t' = -\frac{v_0}{c^2} L_0$. Od tod dobimo že znani rezultat

$$L = \gamma_0 L_0 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) = \frac{L_0}{\gamma_0}$$

1.3.1 Sočasnost

Pomembna posledica Lorentzove transformacije, ki je tuja naši intuiciji, je relativnost sočasnosti dveh dogodkov. Dva dogodka (t_1, x_1, y_1, z_1) in (t_2, x_2, y_2, z_2) sta v sistemu S sočasna, če je $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$. V sistemu S' je

$$\Delta t' = \gamma_0 \left(\Delta t - \frac{v_0}{c^2} \Delta x\right)$$

Če imata dogodka različni koordinati x, je $\Delta t' \neq 0$, v sistemu S' dogodka nista sočasna.

1.3.2 Transformacija (seštevanje) hitrosti

Pri Galilejevi transformaciji velja za hitrost v gibajočem se sistemu $v_x^{'} = v_x - v_0$ in $v_y' = v_y$. Poglejmo, kako se transformirajo komponente hitrosti pri Lorentzovi transformaciji.

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma_0\,(dx - v_0\,dt)}{\gamma_0\left(dt - \frac{v_0}{c^2}dx\right)} = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} \tag{1.6a}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma_0\left(dt - \frac{v_0}{c^2}dx\right)} = \frac{v_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)} \tag{1.6b}$$

$$v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma_0\left(dt - \frac{v_0}{c^2}dx\right)} = \frac{v_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)} \tag{1.6c}$$

Upoštevati smo morali, da se tudi dt transformira. Zato so izrazi za transformirane komponente hitrosti bolj zapleteni in se spremenijo tudi prečne komponente. Obratna transformacija

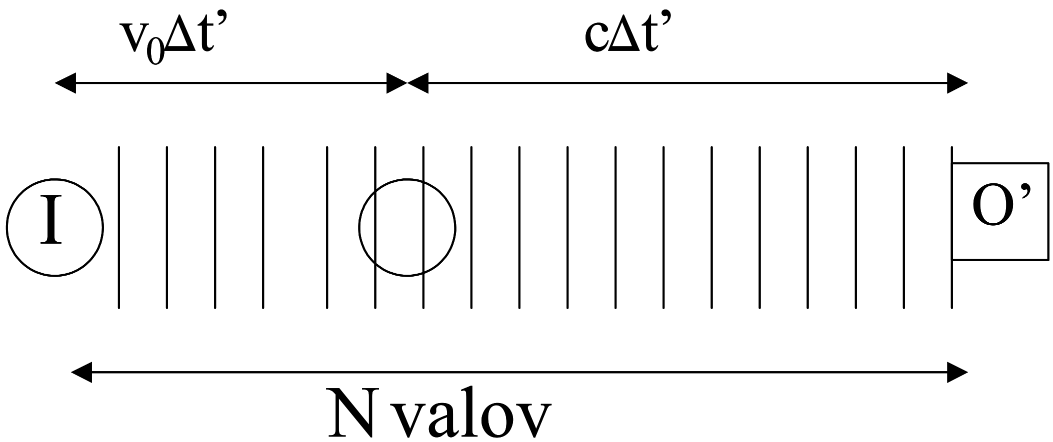
$$v_x = \frac{v_x' + v_0}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}}$$

kaže, da hitrost v nobenem inercialnem sistemu ne more preseči c.

1.3.3 Dopplerjev pojav

Poglejmo, kako se spremeni frekvenca svetlobe, ki jo oddaja izvor I, za opazovalca O', ki miruje v S' in se giblje glede na izvor I s hitrostjo v_0 v smeri osi x. Izvor v sistemu S, v katerem miruje, odda v nekem časovnem intervalu $N = \nu\,\Delta t$ valov. Število izsevanih valov v ustreznem intervalu $\Delta t'$ v S' mora biti enako. V S' se je medtem izvor premaknil za $-v_0\Delta t'$, tako da je

$$\frac{c}{\nu'} = \lambda' = \frac{(v_0 + c)\,\Delta t'}{N} = \frac{(v_0 + c)\,\Delta t'}{\nu\,\Delta t}$$



Slika˜1.4:

Ker je $\Delta t' = \gamma_0 \Delta t$, je

$$\frac{1}{\nu'} = \gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}}}$$

To lahko zapišemo tudi v obliki

$$\nu' = \gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \nu \tag{1.7}$$

V skladu z zahtevo, da so vsi opazovalni sistemi enakovredni, je vseeno, ali se giblje izvor ali opazovalec, pomembna je le relativna hitrost. Pri zvoku, ki se širi po zraku, ni tako. Dobljeni izraz smo pravzaprav izpeljali že pri obravnavi vprašanja, po kolikšnem času zazna mirujoč opazovalec signal, ki ga je oddala ura, ki se giblje.

Pri hitrosti, ki je majhna v primerjavi s svetlobno, je $\gamma_0 \simeq 1$ in je $\nu' = \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \nu$.

Oglejmo si Dopplerjev pojav nekoliko bolj splošno. Naj izvor v S oddaja ravno valovanje v smeri θ glede na os x. Zanima nas, kakšna je frekvenca in smer valovanja v S'. V S zapišemo električno polje

$$E = E_0 \sin\left(k_x\, x + k_{\,y} y - \omega\, t\right) = E_0 \sin\left(k\, x\, \cos\theta + k\, y\, \sin\theta - \omega\, t\right)$$

v S' pa

$$E' = E_0' \sin\left(k_x'\, x' \, + k\,'_y y' \, - \omega'\, t'\right) = E_0' \sin\left(k'\, x' \, \cos\theta' + k'\, y' \, \sin\theta' - \omega'\, t'\right)$$

Velja seveda $k = \omega/c$ in $k' = \omega'/c$. Z uporabo Lorentzove transformacije izrazimo x in t v prvem izrazu z x' in t'. Kako se transformira amplituda polja E_0, nas trenutno ne zanima. Tako je

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin\left(k_x\, \gamma_0\, (x' + v_0 t') \, + k\,_y y' \, - \omega\, \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'\right)\right) = \\ &= E_0 \sin\left(\gamma_0 \left(k_x - \frac{v_0}{c^2}\omega\right) x' + k_y y' - \gamma_0\, (\omega - v_0 k_x)\, t'\right) \end{aligned}$$

Število vseh valov, ki jih izseva izvor, mora biti enako v obeh opazovalnih sistemih. Zato mora biti tudi faza, to je argument sinusa, v obeh sistemih enaka. Sledi, da morata biti v zadnjem izrazu koeficienta pred x'in t' enaka k_x' in ω'. Tako imamo pravila za transformacijo (krožne) frekvence in komponent valovnega vektorja

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma_0\, (\omega - v_0 k_x) && (1.8a) \\ k_x' &= \gamma_0 \left(k_x - \frac{v_0}{c^2}\omega\right) && (1.8b) \\ k_y' &= k_y && (1.8c) \\ k_z' &= k_z \end{aligned}$$

Ta pravila imajo skoraj enako obliko kot Lorentzova transformacija koordinat.

Ker je $k_x = k\, \cos\theta$ in $k = \omega/c$, je frekvenca za opazovalca v S'

$$\omega' = \gamma_0\, (\omega - v_0\, k\, \cos\theta) = \gamma_0 \omega \left(1 - \frac{v_0}{c}\, \cos\theta\right)$$

kar je posplošitev izraza za Dopplerjev pojav, kadar se valovanje v S širi pod kotom θ glede na os x. Zanimivo je, da zaradi faktorja γ_0 dobimo Dopplerjev premik tudi za širjenje pravokotno na smer gibanja opazovalca: $\omega' = \gamma_0 \omega$. Temu pravimo transverzalni Dopplerjev pojav.

Ugotovimo še, kako se v S' spremeni smer širjenja valovanja. Ker je $k_y' = k_y$, je $\omega'/c\, \sin\theta' = \omega/c\, \sin\theta$ in je

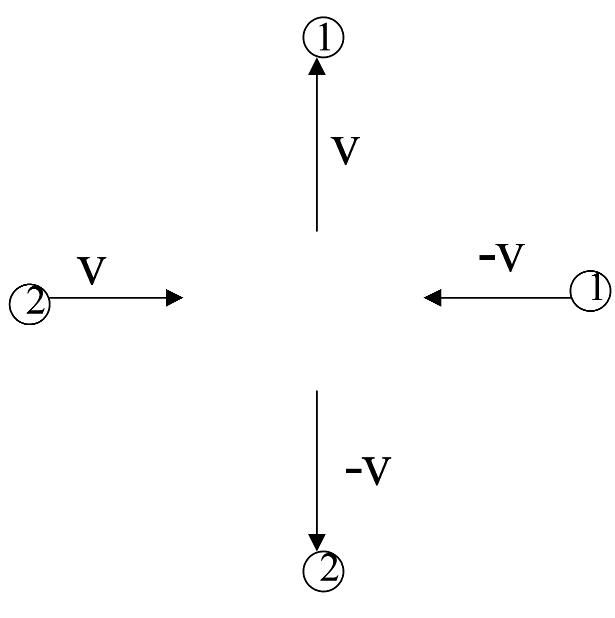
$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c}\, \cos\theta\right)}$$

Odvisnost kota opazovanja od hitrosti opazovalca je mogoče opaziti v astronomiji, kjer se navidezni položaj zvezd spreminja z letnim časom. Pojavu zato pravijo zvezdna aberacija.

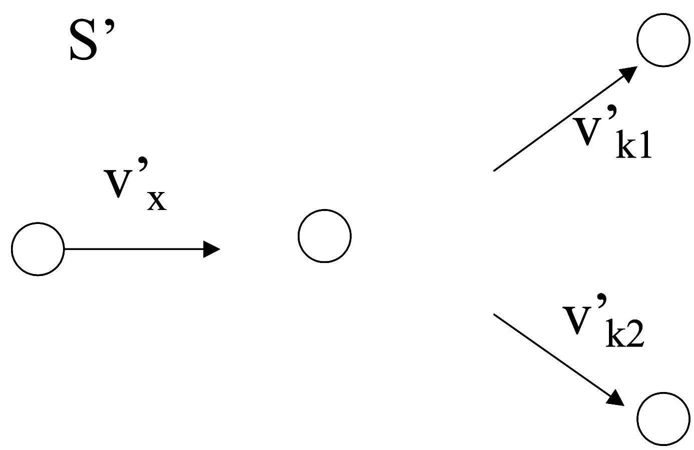
1.4 Relativistična gibalna količina

Doslej smo obravnavali le posledice Lorentzove transformacije za osnovne lastnosti prostora in časa. V fiziki nas seveda zanimajo predvsem zakoni gibanja. V klasični fiziki je to Newtonov zakon, iz katerega izpeljemo izrek o gibalni količini in izrek o energiji. Gibalna količina in energija sta dve najosnovnejši fizikalni količini. Poglejmo, kako ju moramo definirati v relativistični fiziki.

Začnimo z gibalno količino. Obravnavajmo trk dveh enakih krogel. V sistemu S se pred trkom gibljeta s hitrostma v in $-v$ v smeri x, po trku pa z enako velikima hitrostma odletita v smeri ois y, kot kaže skica. Poskusimo najprej s klasičnim izrazom za gibalno količino



Slika˜1.5:



Slika~1.6:

$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$. Pri trku se gibalna količina ohrani, kar smo pri opisu trka v S že upoštevali. V sistemu S' naj krogla 1 miruje, krogla 2 pa ima začetno hitrost v'_x. Hitrost sistema S' je torej $v_0 = -v$. Po pravilih za transformacijo hitrosti je

$$v'_x = \frac{2\,v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Končni hitrosti v smeri x' sta

$$v'_{k1x} = v'_{k2x} = \frac{0 + v}{1 + \frac{0\,v}{c^2}} = v$$

Gibalna količina v S' v smeri x' je pred trkom

$$p'_x = \frac{2\,m\,v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

po trku pa

$$p'_{kx} = 2\,m\,v$$

Po starem definirana gibalna količina se torej v S' ne ohrani, če se ohrani v S.

Zakon o ohranitvi gibalne količine je tako pomemben, da si fiziko brez njega težko predstavljamo. Zato poskusimo popraviti definicijo:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, m\,\mathbf{v} = \gamma\, m\,\mathbf{v} \tag{1.9}$$

Nova definicija se pri majhni hitrosti ujema s staro. Faktor γ je po obliki enak kot γ_0, ki nastopa v Lorentzovi transformaciji, le da v njem nastopa hitrost delca, ne pa koordinatnega sistema. Večkrat v enačbah nastopata oba faktorja in tedaj je treba paziti na razliko med hitrostjo sistema in hitrostjo delca, ki ga obravnavamo.

Preizkusimo, ali se na novo definirana gibalna količina ohranja v vseh koordinatnih sistemih, če se v enem. Razmere v S so enake kot prej. Komponente hitrosti v smeri x' v sistemu S' pred in po trku smo že izračunali. Pred trkom je komponenta gibalne količine

$$\begin{aligned}
p'_x &= \frac{2\,m\,v}{\left(1+\frac{v_2}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{4\,v^2}{c^2(1+v^2/c^2)^2}}} = \\
&= \frac{2\,m\,v}{\sqrt{1+\frac{2v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}-4v^2/c^2}} = \frac{2\,m\,v}{1-\frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

Po trku je $v'_{k2y} = -v'_{k1y}$. V sistemu S je končna hitrost $v_{k1y} = v$, tako da je po 1.6a

$$v'_{k1y} = \frac{v}{\gamma_0\left(1+\frac{v\,v_{kx}}{c^2}\right)} = \frac{v}{\gamma_0} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ker je $v_{kx} = 0$. Po trku je

$$\begin{aligned}
p'_{kx} &= 2\frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v'^2_x+v'^2_y}{c^2}}} = 2\frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2(1-v^2/c^2)}}} = \\
&= 2\frac{m\,v}{\sqrt{1-2\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}}} = \frac{2\,m\,v}{1-\frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

Z novo definicijo se torej gibalna količina ohranja v obeh sistemih. Izraz 1.9 privzamemo za definicijo relativistične gibalne količine.

1.5 Energija

Klasična kinetična energija je $W_k = \frac{1}{2} m\, v^2$. Poglejmo spet, kako se tako definirana energija obnaša pri trku v prejšnjem oddleku. V sistemu S je energija obeh krogel pred in po trku očitno enaka. V S' je pred trkom

$$W_k' = \frac{2\, m\, v^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

po trku pa

$$2\frac{1}{2}m\, \left(v_{kx}'^2 + v_{ky}'^2\right) = m\left(v^2 + \frac{v^2}{\gamma_0^2}\right) = 2\, m\, v^2\left(2 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Spet se klasično definirana kinetična energija v S' ne ohrani.

Kako je treba popraviti definicijo energije, je bolj zapleteno kot v primeru gibalne količine. Sponimo se, da je po izreku o energiji sprememba kinetične energije delca enaka delu vseh sil, ki na delec delujejo. Delec naj se giblje le v smeri osi x:

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx$$

V Newtonovi mehaniki je $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Poskusimo ohraniti to zvezo, le da za gibalno količino uporabimo novi relativistični izraz 1.9. Ali je to pravilno ali ne, nam lahko pove le eksperiment. Tedaj imamo za spremembo energije

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt}\, dx = \int_{p_1}^{p_2} v\, dp$$

Iz $p = m\, v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ sledi

$$v = \frac{c\, p}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

in

$$\begin{aligned} \Delta W &= c\int_{p_1}^{p_2} \frac{p\, dp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} = \\ &= c\sqrt{p_2^2 + c^2m^2} - c\sqrt{p_1^2 + c^2m^2} \end{aligned}$$

Če je začetna hitrost 0, je ΔW ravno kinetična energija:

$$W_k = c\sqrt{p^2 + c^2m^2} - m\,c^2 \tag{1.10}$$

Členu $m\,c^2$ pravimo *mirovna energija,*

$$W = c\sqrt{p^2 + c^2m^2} \tag{1.11}$$

pa *polna energija.* Z uporabo izraza 1.9 za gibalno količino izrazimo polno energijo v obliki

$$W = m\,c^2\sqrt{\frac{v^2}{c^2 - v^2} + 1} = \tag{1.12}$$

$$= \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, m\,c^2 \tag{1.13}$$

Dokler imamo opravka le z enim nesestavljenim delcem, je mirovna energija konstanta, sorazmerna z maso delca. Klasično se masa nesestavljenih delcev in sistemov več delcev ohranja, nekoliko kasneje pa bomo videli, da je v relativistični fiziki to ni več nujno.

Spet lahko preizkusimo, ali se na novo definirana polna energija pri trku ohranja tudi v S'. Pred trkom je

$$\begin{aligned} W' &= \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{4\,v^2}{c^2(1+v^2/c^2)^2}}} + m\,c^2 = \\ &= m\,c^2\frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m\,c^2 = \frac{2m\,c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

po trku pa

$$\begin{aligned} W' &= \frac{2\,m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{kx}'^2 + v_{ky}'^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{2\,m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{2m\,c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Polna energija se torej ohranja v S in S'.

Nova definicija polne in kinetične energije je videti precej durgačna od stare. Poglejmo, da se pri majhnih hitrostih oba izraza za kinetično energijo ujemata:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m\,c^2 = m\,c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots\right) - m\,c^2 = \\ &= \frac{1}{2}\,m\,v^2 \end{aligned}$$

Večkrat imamo opravka tudi z delci, katerih kinetična energija je dosti večja od mirovne. Tedaj lahko v izrazu 1.11 pod korenom zanemarimo člen m^2c^2 in dobimo *ultrarealtivistični* približek

$$W = c\,p\ , \qquad W >> m\,c^2$$

Primer: Elektron pospešimo z napetostjo 20 MV. Kolikšna je njegova hitrost, polna energija in gibalna količina?

Najprej vpeljimo mero za energijo delcev, ki je za mikroskopske delce zelo priročna. Če delec z osnovnim nabojem e_0 pospešimo z napetostjo 1 V, dobi točno določeno energijo, ki ji rečemo 1 *elektronski volt*, 1eV=1,6 10^{-19}J.

Kinetična energija pospešenega elektrona je 20 MeV. Mirovna energija je $m_ec^2 = 514$ keV, tako da je polna energija W =20,5 MeV in $\gamma = 41$. Velja

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}$$

Ker je $\gamma >> 1$, lahko koren razvijemo in je

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = 0.997$$

Gibalna količina je

$$\begin{aligned} p &= \gamma m v = \gamma m c - \frac{mc}{2\gamma} = \\ &= \gamma m c^2\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right) \end{aligned}$$

Če torej za elektron z kinetično energijo 20 MeV uporabimo ultrarelativistični približek, je relativna napaka $3\,.10^{-3}$.

1.5.1 Transformacija gibalne količine in energije

Poglejmo, kako se pri prehodu iz sistema S v sistem S', ki se giblje s hitrostjo v_0, transformirata $\mathbf{p}$ in W. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\,m\,\mathbf{v}' = \gamma'\,m\,\mathbf{v}' \\ W' &= \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma'\,m\,c^2\end{aligned}$$

Potrebujemo γ'. Z uporabo pravil za transformacijo hitrosti 1.6a dobimo

$$\begin{aligned}\gamma' &= \left(1-\frac{v_x'^2+v_y'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(1-\frac{(v_x-v_0)^2}{c^2\left(1-\frac{v_xv_0}{c^2}\right)^2}-\frac{v_y^2\,(1-v_0^2/c^2)}{c^2\left(1-\frac{v_xv_0}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1-\frac{v_xv_0}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)}} = \gamma_0\gamma\left(1-\frac{v_xv_0}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned}W' &= \gamma_0\gamma\,m\,c^2\left(1-\frac{v_xv_0}{c^2}\right) = \gamma_0\,(W-v_0\,p_x) \\ p_x' &= \gamma_0\gamma\,m\,(v_x-v_0) = \gamma_0\left(p_x-\frac{v_0}{c^2}W\right) \\ p_y' &= \gamma_0\gamma\frac{m\,v_y}{\gamma_0} = p_y \\ p_z' &= p_z\end{aligned}$$

Transformacija energije in gibalne količine je skoraj enaka kot Lorentzova tarsnformacija koordinat.

1.6 Vektorji četverci in štirirazsežni prostor-čas

Videli smo, da se poleg koordinat z Lorentzovo trasformacijo transformirajo tudi gibalna količina z energijo in valovni vektor s frekvenco. To se povsem jasno vidi, če vse tri transformacije zapišemo v nekoliko popravljeni obliki, tako da imajo vse količine, ki se trasnformirajo skupaj, enake enote:

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma_0 \left(ct - \frac{v_0}{c}\, x \right) \\
x' &= \gamma_0 \left(x - \frac{v_0}{c} c\, t \right) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{W'}{c} &= \gamma_0 \left(\frac{W}{c} - \frac{v_0}{c}\, p_x \right) \\
p'_x &= \gamma_0 \left(p_x - \frac{v_0}{c} \frac{W}{c} \right) \\
p'_y &= p_y \\
p'_z &= p_z
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'}{c} &= \gamma_0 \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v_0}{c}\, k_x \right) \\
k'_x &= \gamma_0 \left(k_x - \frac{v_0}{c} \frac{\omega}{c} \right) \\
k'_y &= k_y \\
k'_z &= k_z
\end{aligned}$$

V vseh treh primerih se skupaj transformirajo komponente vektorja v trirazsežnem prostoru in še ena količina, to je čas, energija ali frekvenca. Tvorimo lahko četverice (ct, x, y, z), $(W/c, p_x, p_y, p_z)$ in $(\omega/c, k_x, k_y, k_z)$, ki jim pravimo *vektorji četverci.* Tvorijo štirirazsežen vektorski prostor. Pri prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega se transformirajo z Lorentzovo transformacijo. Prvi komponenti pravimo časovna komponenta, naslednjim trem, ki so vedno komponente trirazsežnega vektorja iz običajnega trirazse"nega prostora, pa prostorske komponente. Čertverec pogosto imenujemo po njegovem krajevnem delu, na primer četverec kraja ali gibalne količine, namesto kraja in čas ali gibalne količine in energije. Kaj je časovna komponenta danemu trirazsežnemu vektorju, seveda ni poljubno, ampak je določeno z Lorentzovo transformacijo. Ni tudi nujno, da je vsaka fizikalna količina, ki tvori trirazsežni vektor, del četverca. Električno in magnetno polje sta na primer dela štirirazsežnega tenzorja, to je matrike. Za vektor hitrosti tudi že vemo, da ni del četverca, saj se ne transformira po Lorentzovi transformaciji. To razumemo tudi drugače: hitrost dobimo tako, da krajevni del četverca delimo z časovnim delom, to pa seveda ne more biti več vektor.

Komponente četvercev označujemo z grškimi indeksi z vrednostjo od 0 do 4. Tako lahko zapišemo na primer četverec položaja

$$(ct, x, y, z) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = x^\mu$$

in četverec gibalne količine

$$p^\mu = \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right) = \left(\frac{W}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

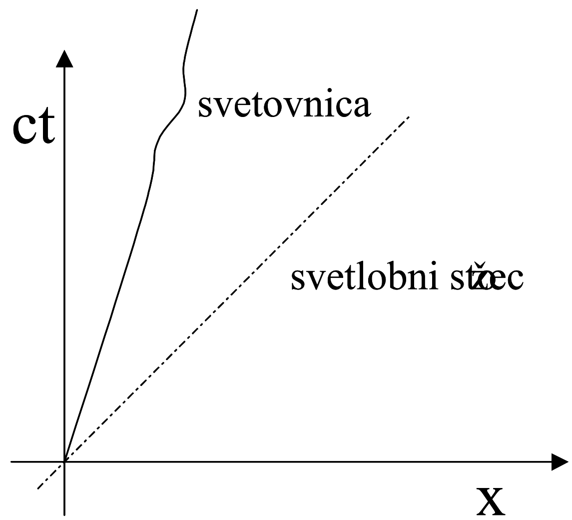
Lorentzovo transformacijo lahko v prostoru četvercev zapišemo v obliki matrike. Za manj pisanja vpeljimo oznako $\beta_0 = v_0/c$. Matrika transformacije je

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & -\gamma_0\beta_0 & 0 & 0 \\ -\gamma_0\beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Z njo lahko trnsformacijo v sistem S' zapišemo

$$x'^\mu = \sum_\nu \mathbf{L}^{\mu\nu} x^\nu \tag{1.16}$$

Seštevanje po dveh indeksih je zelo pogosto, zato navadno vpeljemo sumacijsko pravilo, da je treba sešteti po indeksu, ki se v nekem izrazu



Slika~1.7:

pojavi dvakrat, pri čemer znak za vsoto pred izrazom ni potreben. Po tem dogovoru lahko 1.16 zapišemo preprosteje

$$x'^{\mu} = \mathbf{L}^{\mu\nu} x^{\nu}$$

Dve zaporedni Lorentzovi transformaciji sta spet Lorentzova transformacija. Njeno matriko dobimo tako, da zmnožimo matriki posameznih transformacij. Tako lahko poiščemo matriko za transformacijo, pri kateri se drugi sistem giblje glede na prvega v poljubni smeri.

Gibanje delca lahko predstavimo kot krivuljo v štirirazsežnem prostoru. Taki krivulji pravimo *svetovnica*. Za primer imejmo gibanje po osi x, ki ga lahko predstavimo v ravnini (x, ct): Ker je hitrost vsakega delca omejena s hitrostjo svetlobe, je strmina svetovnice v (x, ct) diagramu vedno večja 0d 1. Svetovnice svetlobe imajo strmino 1 in tvorijo trirazsežni *svetlobni stožec*.

1.6.1 Skalarni produkt četvercev in invariante

Skalarni podukt dveh vektorjev v trirazsežnem prostoru da skalar, to je količino, ki se ne spremeni pri prehodu iz enega koordinatnega sistema v drugega. Taki količini pravimo invarianta.

Vzemimo kar četverec položaja. Skalarni produkt vektorja s samim seboj, kot ga poznamo iz trirazsežnega prostora, bi bil

$$(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Vendar tak skalarni produkt ni neobčutljiv na Lorentzovo transformacijo:

$$\begin{aligned}(ct')^2 + x'^2 &= \gamma_0^2 \left((ct)^2 - 2\beta_0 x\, ct + \beta_0^2\, x^2\right) + \gamma_0^2 \left(x^2 - 2\beta_0 x\, ct + \beta_0^2\, (ct)^2\right) = \\ &= \gamma_0^2 \left(1 + \beta_0^2\right)\left((ct)^2 + x^2\right) - 2\gamma_0^2 \beta_0\, x\, ct\end{aligned}$$

Ker je hitrost svetlobe v vseh sistemih c, je za svetlobni signal $x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 = 0$. To smo uporabili, ko smo iskali Lorentzovo transformacijo. Zato poskusimo definirati skalarni produkt z

$$x^\mu x^\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \tag{1.17}$$

Zlahka se prepričamo, da je tak skalarni produkt invarianta na Lorentzovo transformacijo:

$$\begin{aligned}(ct')^2 - x'^2 &= \gamma_0^2 \left((ct)^2 - 2\beta_0 x\, ct + \beta_0^2\, x^2\right) - \gamma_0^2 \left(x^2 - 2\beta_0 x\, ct + \beta_0^2\, (ct)^2\right) = \\ &= \gamma_0^2 \left(1 - \beta_0^2\right)\left((ct)^2 - x^2\right) = (ct)^2 - x^2\end{aligned}$$

Skalarni produkt dveh četvercev je

$$a^\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \tag{1.18}$$

Skalarni produkt trirazsežnega vektorja s samim seboj je vedno pozitiven in je seveda kar kvadrat dolžine vektorja. Skalarni produkt četverca je lahko pozitiven, negativen ali 0. (Vektroski prostor s takim skalarnim produktom je psevdoevklidski). Kvadrat razmika med dvema dogodkoma

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.19}$$

je invarianta. Če je $ds^2 > 0$, pravimo, da je razmik med dogodkoma *časovnega tipa*, če je $ds^2 < 0$, je razmik *krajevnega tipa*, kadar pa je $ds^2 = 0$, je razmik *svetlobnega tipa*.

Za razmik časovnega tipa vedno lahko najdemo tak inercialni sistem, da je krajevna razdalja med dogodkoma 0. Naj ima krajevni del le komponento dx. Če je $ds^2 > 0$, je $cdt > dx$. Iščemo sistem S', v katerem bo

$$dx' = \gamma_0 \left(dx - v_0 dt\right) = 0$$

Hitrost sistema je $v_0 = \frac{dx}{dt} < c$, iskani sistem torej obstaja.

Za razmik svetlobnega tipa je v vsakem sistemu $ds^2 = 0$,zato je v vsakem sistemu $dx = c\,dt$. Dogodka, med katerima je $ds = 0$, morata biti na svetovnici, ki predstavlja gibanje s svetlobno hitrostjo, neodvisno od opazovalnega sistema.

Za razmik krajevnega tipa vedno obstoja inercialni sistem, v katerem je časovni interval med dogodkoma $dt' = 0$. V tem primeru je $cdt < dx$ in dobimo iz zahteve

$$\begin{aligned} cdt' &= \gamma_0 \left(cdt - \frac{v_0}{c} dx\right) = 0 \\ v_0 &= c^2 \frac{dt}{dx} < c \end{aligned}$$

Zahtevani sistem torej obstaja. V sistemu S' sta dogodka sočasna.

Dogodka, med katerima je razmik časovnega tipa, lahko predstavljata položaj delca v dveh zaporednih trenutkih, dogodka svetlobnega tipa pa ležita na svetlobnem stožcu in ju lahko povezuje svetlobni signal. Dogodki časovnega in svetlobnega tipa so zato lahko vzročno povezani. Ker sta dogodka, med katerima je razmik krajevnega tipa, lahko sočasna, med njima ne more biti vzročne povezave.

Lastni čas

Razmik med dvema dogodkoma na svetovnici danega delca je nujno časovnega tipa. To pomeni, da vedno obstaja sistem S', v katerem delec trenutno miruje. V tem sistemu je $dx' = 0$ in je

$$ds^2 = c^2\, dt'^2$$

ds je invarianta, torej skalar, neodvisen od opazovalnega sistema. Torej je tudi dt' invarianta - diferencial *lastnega časa*, ki ga označimo z $d\dot{\tau}$. Čas v sistemu S, v katerem se delec giblje s trenutno hitrostjo $\mathbf{v}$, je po Lorentzovi transformaciji podaljšan:

$$dt = \gamma\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, d\tau \tag{1.20}$$

kjer je $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. Hitrost delca v S je lahko odvisna od časa. Tedaj je zveza med koordinatnim časom v S in lastnim "asom

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} \tag{1.21}$$

Primer: V mirovanju je razpadni čas mionov (elementarnih delcev, sorodnih elektronom) $\tau_0 = 2,2\cdot 10^{-6}$ s. Mioni krožijo v magnetnem polju shranjevalnega obroča. Iz znanega radija in frekvence kroženja (zvezo bomo dobili nekoliko kasneje) dobimo, da je $\gamma = 29,3$. Izmerjeni razpadni čas je $\tau_1 = 64,3\cdot 10^{-6}$ s , kar se dobro ujema z $\tau_1 = \gamma\,\tau_0$.

Invarianta je seveda tudi skalarni produkt četverca gibalne količine

$$p^\mu p^\mu = \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

Ta invarianta je sorazmerna z maso delca, ki je torej tudi invarianta. Imamo še

$$k^\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

Da je ta invarianta enaka 0, pričakujemo, saj četverec valovnega vektorja opisuje širjenje svetlobe.

1.6.2 Četverci kot vektorski prostor

Vsota dveh vektorjev je spet vektor in produkt vektorja s skalarjem je vektor. Tako lahko tvorimo nove četverce. Poglejmo, kako dobimo četverec hitrosti.

Ugotovili smo, da komponente običajne hitrosti $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ niso vektor, ker dt ni skalar, ampak komponenta četverca. Torej tudi $\frac{dx^\mu}{dt} = \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ ni četverec. Lastni čas pa je skalar, tako da je

$$u^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) \tag{1.22}$$

pravi četverec, ki se transformira z Lorentzovo transformacijo. Ker je v izbranem koordinatnem sistemu $dt = \gamma\, d\tau$, je

$$u^\mu = (c\,\gamma, \gamma\, v_x, \gamma\, v_y, \gamma\, v_z) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(c,\, v_x,\, v_y, v_z)$$

Ne pozabimo, da je γ funkcija hitrosti delca, ne koordinatnega sistema, in se lahko s časom spreminja.

Prav lahko se prepričamo, da iz Lorentzove tarsnformacije četverca hiitrosti sledijo že znana pravila transformacije komponent običajne hitrosti. Na primer

$$u^{'1} = \gamma' v'_x = \gamma_0\left(u^1 - \frac{v_0}{c}u^0\right) = \gamma_0\gamma\,(v_x - v_0)$$

Paziti smo morali, da se transformira tudi faktor $\dot\gamma$, kar lahko dobimo iz

$$u^{'0} = c\gamma' = \gamma_0\left(u^0 - \frac{v_0}{c}u^1\right) = \gamma_0\gamma c\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)$$

Iz obeh enačb razberemo

$$v'_x = \frac{\gamma_0\gamma}{\gamma'}\,(v_x - v_0) = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

Očitno je cetverec hitrosti v preprosti zvezi s četvercem gibalne količine:

$$p^\mu = m\,u^\mu$$

Ta zveza je formalno enaka kot v klasični fiziki.

1.7 Enačba gibanja

Osnovni zakon gibanja v klasični fiziki je drugi Newtonov zakon

$$\mathbf{F} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

To ne more biti relativistično pravilna enačba, saj dopušča, da hitrost v izbranem opazovalnem sistemu poljubno raste. Enačbo gibanja pa lahko zapišemo tudi v drugi obliki, ki smo jo že uporabili, ko smo iskali pravo obliko izraza za polno energijo:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{1.23}$$

Uporabiti moramo relativistični izraz $\mathbf{p} = \gamma\, m\, \mathbf{v}$. Pri tem pa ne vemo, kaj je sila, gornja enačba je pravzaprav njena definicija. Pri Fiziki I si s tem nismo preveč belili glave in smo kot model vzeli silo vzmeti, kjer je eksperiment pokazal, da je pospešek zaradi sile vzmeti sorazmeren z raztezkom vzmeti. Tako smo dobili vzmetno tehtnico, s katero smo lahko merili druge sile, na primer težo ali električno silo. V posebni relativnosti si ne moremo pomagati niti z vzmetmi niti z gravitacijo. Vzmeti se obnašajo preprosto le, dokler so hitrosti raztegov majhne v primerjavi s hitrostjo zvoka v snovi, torej mnogo manjše kot hitrost svetlobe, gravitacije pa s posebno teorijo sploh ne moremo obravnavati. Tako nam kot primer sile v relativistični dinamiki ostane le elektromagnetna sila.

V klasični fiziki smo (Lorentzovo) silo na nabit delec zapisali

$$\mathbf{F} = e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.24}$$

Ta izraz privzamemo kot zapis sile v izbranem koordinatnem sistemu tudi v relativistični fiziki. Pri tem seveda za polja veljajo Maxwellove enačbe, za katere vemo, da se pravilno transformirajo pri Lorentzovi transformaciji. Le eksperiment lahko pove, ali je ta privzetek pravilen. Vse dosedanje meritve in izkušnje so z vso dosegljivo mersko natančnostjo v skladu z enačbama 1.23 in 1.24. Ni jih malo, med drugim vsa tehnika velikih pospeševalnikov temelji na gornjih enačbah.

Gibalno enačbo 1.23 lahko torej zapišemo v eksplicitni obliki

$$e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = m\frac{d\,(\gamma\mathbf{v})}{dt} \tag{1.25}$$

kjer ne smemo pozabiti, da je tudi γ odvisen od hitrosti: $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ta enačba nam pri znanih poljih omogoča določiti hitrost in tir delca.

Gibalna enačba 1.23 je sicer pravilna, vendar tako zapisana sila ni del četverca, saj stoji na desni odvod gibalne količine po koordinatnem času, torej komponenti četverca. Običajna sila se zato ne transformira z Lorentzovo transformacijo. Lahko pa tvorimo četverec, ki mu pravimo sila Minkovsekga, tako da odvajamo gibalno količino po lastnem času delca:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{1.26}$$

Ker je $dt = \gamma\, d\tau$, je

$$\mathcal{F}^\mu = \gamma \frac{dp^\mu}{dt}$$

Od tod lahko preberemo, da so krajevne komponente sile Minkovskega $\gamma\mathbf{F}$. Časovna komponenta je

$$\mathcal{F}^0 = \frac{dp^0}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\frac{W}{c}$$

Odvod energije delca po času je moč sile, ki jo lahko zapišemo $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, tako da je

$$\mathcal{F}^\mu = \left(\gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, \gamma\, F_x, \gamma\, F_y, \gamma\, F_z\right) = \left(\gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, \gamma\, \mathbf{F}\right) \tag{1.27}$$

S silo Minkovskega lahko enačbo gibanja zapišemo v formalno enaki obliki kot Newtonov zakon:

$$\mathcal{F}^\mu = m \frac{d\, u^\mu}{d\tau} \tag{1.28}$$

Prednost zapisa s četverci je, da se takoj vidi, da sta izpolnjeni Einsteinovi zahtevi: obe strani enačbe se transformirata z Lorentzovo transformacijo in imata zato v vseh inercialnih sistemih enako obliko. Za enačbe, ki so zapisane tako, da v njih nastopajo le četverci in skalarji, pravimo, da so *kovariantne*.

Iz Lorentzove sile dobimo silo Minkovskega

$$\mathcal{F}^\mu = \left(\gamma \frac{e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{c}, \gamma e \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)\right)$$

Ker je magnetni del sile vedno pravokoten na hitrost, k moči in časovnemu delu ne prispeva.

Primeri:

1. Kroženje nabitega delca v konstantnem magnetnem polju. Delec naj ima začetno hitrost v v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje. Uporabimo giblanom enačbo v obliki1.23

   $$m\frac{d\gamma\,\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

   Sila je le magnetna

   $$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

   Ker je sila vselej pravokotna na hitrost, je velikost hitrosti konstantna in je tudi γ konstanta. Tako kot v nerelativističnem primeru je gibanje torej kroženje. $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ima le radialno komponento (radialni pospešek) $\omega_c^2 r = \omega_c v = v^2/r$ in imamo

   $$\begin{aligned} m\,\gamma\,\omega_c v &= ev\,B = m\,\gamma\,v^2/r \\ \omega_c &= \frac{e\,B}{\gamma\,m} \\ r &= \frac{m\,\gamma\,v}{e\,B} = \frac{p}{e\,B} \end{aligned}$$

   Vidimo, da se kotna hitrost, ki ji pravimo tudi *ciklotronska frekvenca,* ω_c pri relativističnih hitrostih zmanjša za faktor γ, ciklotronski radij pa poveča in je vedno sorazmeren z velikostjo gibalne količine.

   Elektron z energijo 5 GeV ima $\gamma = 10^4$. Za gibalno količino lahko uporabimo ultrarelativistični približek $p = W/c$. V magnetnem polju 1 T je radij kroženja

   $$r = \frac{5\cdot 10^9 \mathrm{eV\,m^2}}{c\,e\,1\,\mathrm{Vs}} = 17\,\mathrm{m}$$

   ciklotronska frekvenca pa $\omega_c = 1,8\cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$.

2. Pospeševanje nabitega delca v konstantnem električnem polju. Naj bo začetna hitrost delca 0. Gibalna enačba je

   $$\frac{d\,\gamma\,v}{dt} = \frac{e}{m}E$$

Enkrat lahko takoj integriramo

$$\gamma\, v = \frac{e\,E}{m}\,t = c\,\alpha t, \qquad \alpha = \frac{eE}{mc} \tag{1.29}$$

Od tod izračunamo hitrost:

$$v = \frac{\frac{eE}{m}\,t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} = c\frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}$$

Dokler je hitrost majhna, je $v = eE\,t/m$, kar je seveda pričakovani nerelativistični rezultat. Izraz za hitrost lahko še enkrat integriramo in dobimo položaj delca

$$x = c\int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}\,dt = \frac{mc^2}{eE}\left(\sqrt{1+\alpha^2 t^2} - 1\right)$$

Za $t << 1/\alpha$ lahko koren razvijemo in se prepričamo, da dobimo nerelativistični izraz za pot pri enakomerno pospešenem gibanju. Izračunajmo še lastni čas pri koordinatnem času t. Za to najprej iz enačbe 1.29 izračunamo

$$\gamma = \sqrt{1+\alpha^2 t^2}$$

Po enačbi 1.21 je

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} = \frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}(\alpha t)$$

Koordinatni čas kot funkcija lastnega časa je torej

$$t = \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha\tau)$$

Za dolge čase je torej koordinatni čas eksponentno daljši od lastnega časa. Z izrazom za γ lahko zapišemo še polno energijo

$$W = m\,\gamma\,c^2 = mc^2\sqrt{1+\alpha^2 t^2}$$

To lahko izrazimo še drugače. Iz izraza za x vidimo, da je $\gamma = \frac{eE}{mc^2}x + 1$ in je

$$W = e\,E\,x + mc^2 = e\,U + mc^2$$

kjer je U pospeševalna napetost na poti x.

1.8 Sistemi delcev

Imejmo več delcev, ki so dovolj vsaksebi, da je njihova medsebojna potencialna energija zanemarljiva. Tedaj je skupni četverec gibalne količine vsota četvercev gibalne količine posameznih delcev

$$P^\mu = \sum_i p_i^\mu = (\sum_i \frac{W_i}{c}, \sum_i \mathbf{p}_i)$$

Če na sistem ne delujejo nobene zunanje sile, velja zakon o ohranitvi četverca gibalne količine

$$P_z^\mu = P_k^\mu \tag{1.30}$$

ali četverca gibalne količina na začetku in koncu (na primer pred in po trku) sta enaka. Po komponentah velja posebej ohranitev časovne komponente - energije in krajevne komponente - trirazsežnega vektorja gibalne količine:

$$W_z = W_k \qquad \text{in} \qquad \mathbf{P}_z = \mathbf{P}_k \tag{1.31}$$

Delcev je na koncu lahko več ali manj kot na začetku, le njihova medsebojna potencialna energija mora biti zanemarljiva.

Omejitev, da med delci ne sme biti interakcije, je potrebna, da lahko skupni četverec gibalne količine zapišemo kot preprosto vsoto po delcih sistema. Očitno k skupni energiji prispeva tudi medsebojna potencialna energija, ki zaradi Lorentzove transformacije prispeva tudi k trirazsežni gibalni količini sistema. Poleg tega smo v klasični fiziki izpeljali izrek o gibalni količini iz zakona o vzajemnem učinku sil. Ta prepostavlja, da sila deluje v trenutku na vsako razdaljo, kar ni v skladu z zahtevami posebne teorije relativnosti. Vse te pomanjkljivosti popravimo, če tudi polju sil, na primer elektromagnetnemu polju, pripišemo poleg energije še gibalno količino. Na koncu leta bomo videli, da lahko osnovne sile predstavimo kot izmenjavo posebnih delcev sile, za elektromagnetno silo so to fotoni. Če torej v vsoti četvercev gibalne količine upoštevamo tudi delce polj sil, velja zakon o ohranitvi energije in gibalne količine brez omejitev in je med najosnovnejšimi zakoni fizike.

1.8.1 Težiščni sistem

Za obravnavo sistema delcev je ugodno vpeljati težiščni inercialni opazovalni sistem. V klasični fiziki je bil to sistem, v katerem je bila skupna gibalna količina vseh delcev enkak nič. Relativistično ne moremo zahtevati, da je skupni četverec gibalne količine nič, ker za transformacijo četvercev velja Lorentzova transformacija, po kateri je četverec, ki ima vse komponente enake nič v enem sistemu, v vseh sistemih nič. Pač pa lahko zahtevamo, da so v težiščnem sistemu krajevne komponente, to je trirazsežna gibalna količina, enake nič.

Za naše potrebe bo zadoščal privzetek, da se težiščni sistem giblje v smeri x glede na laboratorijski sistem. Hitrost tega sistema v^* poiščemo iz zahteve, da mora biti ustrezna komponenta gibalne količine, transformirana iz laboratorijskega sistema v težiščnega, enaka nič:

$$\sum_i p_{ix}^* = \gamma^* \left(\sum_i p_{ix} - v^* \sum_i \frac{W_i}{c^2} \right) = 0$$

Sledi

$$v^* = c^2 \frac{\sum\limits_i p_{ix}}{\sum\limits_i W_i} \tag{1.32}$$

Če so kinetične energije delcev majhne v primerjavi z mirovnimi energijami, dobimo nerelativistični izraz za hitrost težišča.

Ugotovili smo, da je kvadrat četverca invarianta. Velja torej

$$\left(\sum_i \frac{W_i}{c^2} \right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right)^2 = \left(\sum_i \frac{W_i^*}{c^2} \right)^2 \tag{1.33}$$

ker je krajevni del v težiščnem sistemu nič. Za en delec je bila vrednost kvadrata četverca gibalne količine kar m^2c^2, zato je tudi v primeru sistema delcev desna stran enačbe kar $(Mc)^2$, kjer je M skupna masa sistema. Ta očitno ni kar vsota mas posameznih delcev. V kolikor bi med delci imeli tudi potencialno energijo, bi tudi ta prispevala k masi sistema.

Zaradi zakona o ohranitvi gibalne količine in energije lahko eno stran invariante izračunamo pred trkom, drugo pa po trku, kar včasih pomaga pri računih:

$$\left(\sum_i \frac{W_i}{c^2} \right)_z^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right)_z^2 = \left(\sum_i \frac{W_i^*}{c^2} \right)_k^2$$

1.8.2 Prožni trk

Kot prvi primer uporabe zakona o ohranitvi energije in gibalne količine obravnavajmo prožni trk dveh enakih delcev. Da je trk prožen, morata biti delca pred in po trku enaka, torej se njuni masi ne smeta spremeniti. Naj v laboratorijskem sistemu en delec miruje, drug pa trči v njega s hitrostjo v. Skupna energija in gibalna količina morata biti pred in po trku enaki:

$$\begin{aligned} W_{1z} + W_{2z} &= W_{1k} + W_{2k} \\ \mathbf{p}_{1z} + \mathbf{p}_{2z} &= \mathbf{p}_{1k} + \mathbf{p}_{2k} \end{aligned}$$

Ohranitvene enčbe veljajo v vsakem sistemu. Najlažje bomo nalogo rešili v težiščnem sistemu. Hitrost težišča je po 1.32

$$v^* = c^2 \frac{mv\gamma}{mc^2 + mc^2\gamma} = c\,\frac{\beta\gamma}{1+\gamma} = c\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

kjer je $\gamma = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Uporabili smo tudi zvezo $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Izračunamo še

$$\gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Drugi delec v laboratorijskem sistemu na začetku miruje. Začetni gibalni količini v težiščnem sistemu dobimo z Lorentzovo transformacijo

$$p_{2z}^* = -p_{1z}^* = \gamma^* \left(0 - mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right) = -mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$$

V smeri y sta začetni gibalni količni 0. Začetni in končni energiji sta v težiščnem sistemu enaki:

$$W_{1z}^* = W_{2z}^* = W_{1k}^* = W_{2k}^* = \gamma^* \left(mc - 0\right) = mc\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Po trku bosta v težiščnem sistemu delca odletela z enakima hitrostma simetrično pod kotoma ϕ^* in $\pi + \phi^*$ glede na os x:

$$\begin{aligned} p_{1kx}^* &= p_{1z}^* \cos\phi^* \\ p_{2kx}^* &= -p_{1z}^* \cos\phi^* \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} p^*_{1ky} &= p^*_{1z} \sin\phi^* \\ p^*_{2ky} &= -p^*_{1z} \sin\phi^* \end{aligned}$$

Kot ϕ^* je seveda poljuben. Z obratno Lorentzovo transformacijo dobimo končne komponente gibalne količine v laboratorijskem sistemu:

$$\begin{aligned} p_{1kx} &= \gamma^* \left(p^*_{1kx} + v^* \frac{W^*_{1k}}{c^2} \right) = \\ &= mc\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \cos\phi^* + \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \right) = \\ &= \frac{mc}{2} \sqrt{\gamma^2 - 1} \, (\cos\phi^* + 1) \end{aligned}$$

$$p_{2kx} = \frac{mc}{2} \sqrt{\gamma^2 - 1} \, (1 - \cos\phi^*)$$

$$\begin{aligned} p_{1ky} &= p^*_{1z} \sin\phi^* = mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \sin\phi^* \\ p_{2ky} &= -p^*_{1z} \sin\phi^* = -mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \sin\phi^* \end{aligned}$$

Če je $\phi^* = \pi$, je trk centralen in je $p_{2k} = p_{1z}$ in $p_{1k} = p_{2z} = 0$, kot klasično delca le izmenjata gibalni količini in energiji.

Kota, pod katerima odletita delca v laboratorijskem sistemu, dobimo iz

$$\begin{aligned} \tan\phi_1 &= \frac{p_{1ky}}{p_{1kx}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \frac{\sin\phi^*}{1 + \cos\phi^*} \\ \tan\phi_2 &= \frac{p_{2ky}}{p_{2kx}} = -\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \frac{\sin\phi^*}{1 - \cos\phi^*} \end{aligned}$$

Velja

$$\tan\phi_1 \tan\phi_2 = -\frac{2}{\gamma+1}$$

in dobimo kot med delcema

$$\begin{aligned}\tan(\phi_1 - \phi_2) &= \frac{\tan\phi_1 - \tan\phi_2}{1 + \tan\phi_1 \tan\phi_2} = \\ &= 2\frac{\sqrt{2(\gamma+1)}}{\gamma - 1}\frac{1}{\sin\phi^*}\end{aligned}$$

Če je hitrost majhna in je γ blizu 1, je $\tan\phi$ zelo velik in gre kot med tiroma delcev proti $\pi/2$. Pri velikih γ je kot manjši, sipanje je torej usmerjeno bolj naprej, kar je značilno za relativistične trke.

1.8.3 Neprožni trk

Kot drugi primer obravnavajmo trk, pri katerem se delca sprimeta. En delec naj ima na začetku hitrost v, drugi naj miruje. V laboratorijskem sistemu velja spet

$$\begin{aligned}W_1 + W_2 &= W \\ \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}\end{aligned}$$

ali izpisano

$$\begin{aligned}m\gamma_1 c^2 + mc^2 &= M\gamma c^2 \\ m\gamma_1 v_1 &= M\gamma v\end{aligned}$$

kjer je M masa sprijetega delca. Te enačbe zadoščajo, a lažje bomo do rezultata prišli takole. V težiščnem sistemu mora delec po trku mirovati. Zapišimo invariantni kvadrat četverca gibalne količine v laboratorijskem sistemu pred trkom in v težiščnem sistemu po trku:

$$(m\gamma_1 c + mc)^2 - (m\gamma_1 v_1)^2 = M^2 c^2$$

od koder takoj izračunamo maso sprimka

$$M = m\sqrt{2(\gamma_1 + 1)} \tag{1.34}$$

kjer smo spet uporabili zvezo $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Iz enačbe za ohranitev energije dobimo še

$$\gamma = \sqrt{\frac{\gamma_1 + 1}{2}}$$

Izraz 1.34 nam je dal nov rezultat, da je masa sprimka večja od vsote mas obeh delcev pred trkom. Del kinetične energije prvega delca se je torej pretvoril v maso sprimka, del pa je ostal kot kinetična energija sprimka. S tem je znameniti izraz $E = mc^2$ dobil pravo vsebino: energija se lahko pretvori v maso. Možen je seveda tudi obraten proces, ki je v jedrski fiziki pogost: težji delec razpade na dva lažja, tako da je vsota njunih mas manjša od začetne mase, preostala začetna masa pa se pretvori v kinetično energijo končnih delcev.

Dodatna masa sprimka je posledica notranje energije sprimka. Na primer: če se nevtron z znatno kinetično energijo ujame v neko jedro, se bo masa nastalega jedra spremenila maso enega nevtrona in za razliko začetne kinetične energije nevtrona in končne kinetične energije nastalega jedra, pri tem pa bo povečana energija vseh protonov in nevtronov v jedru.

1.8.4 Razpoložljiva energija

Sprijemanje relativističnih delcev ni ravno pogosto; običajno pritrku nastanejo novi delci. Vzemimo spet, da se imamo pred trkom dva enaka delca, od katerih eden miruje, drugi pa ima hitrost v_1. Če po trku vsi delci v težiščnem sistemu mirujejo, je skupna masa na novo nastalih delcev ravno razlika med začetno maso obeh delcev in v prejšnjem razdelku izračunano maso sprimka:

$$m_r = M - 2m = 2\,m\left(\sqrt{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} - 1\right)$$

Količini $W_r = m_r c^2$ pravimo *razpoložljiva energija.* Vsa začetna kinetična energija

$$T = mc^2\,(\gamma - 1)$$

je večja od razpoložljive energije, saj mora del začetne kinetične energije ostati kot kinetična energija težišča, da se lahko ohrani tudi gibalna količina. Razpoložljivo energijo lahko izrazimo s T:

$$W_r = 2mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}} - 1\right)$$

Če je $T << mc^2$, lahko koren razvijemo in je

$$W_r \simeq \frac{T}{2}$$

za zelo velike začetne energije $T >> mc^2$ pa je

$$W_r \simeq \sqrt{2mc^2T}$$

Tedaj torej razpoložljiva energija narašča le kot koren iz vpadne energije. Tvorba novih delcev pri trkih je zelo pomembna v fiziki osnovnih delcev, kjer z velikimi pospeševalniki raziskujejo osnovne gradnike snovi. Pri trkih elektrona z energijo 100 GeV v mirujoč elektron je razpoložljiva energija le približno 300 MeV. Zato danes v velikih pospeševalnikih pospe"ujejo elektrone in pozitrone ali protone in antiprotone v nasprotnih smereh. Tedaj je laboratorijski sistem tudi težiščni in je vsa kinetična energija na voljo za tvorbo novih delcev. Takim pospeševanlikom pravijo tudi trkalniki.

Primer: Tvorba para elektron-pozitron pri trku elektrona z elektronom.

Kolikšna je minimalna kinetična energija elektrona, ki trči v mirujoč elektron, da se lahko tvorita nova delca elektron in pozitron? (Ne more se tvoriti le en elektron, ker velja zakon o ohranitvi števila lahkih delcev in se zato elektron lahko tvori le skupaj s svojim antidelcem - pozitronom, ki ima pozitiven naboj in enako maso. Več o tem na koncu leta.)

Razpoložljiva energija mora biti $2m_ec^2$. Tako je

$$\begin{aligned} 4m_ec^2 &= 2m_ec^2\sqrt{1+\frac{T}{2m_ec^2}} \\ T &= 6\,m_ec^2 = 3\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Le tretjina vpadne kinetične enrgije gre v tvorbo para, ostalo je kinetična energija delcev po trku.

Primer: Tvorba para pri trku fotona z elektronom.

Kot drugi primer izračunajmo, kolišna mora biti energija fotona, da pri trku z drugim delcem z maso M nastane nov par elektron - pozitron. Ker je foton delec z mirovno maso 0, moramo računati od začetka. Spet zapišimo invariantni kvadrat četverca gibalne količine v laboratorijskem sistemu pred trkom in v težiščnem sistemu po trku. Minimalno potrebno energijo dobimo z zahtevo, da vsi delci po trku v težiščnem sistemu mirujejo:

$$\begin{aligned}
\left(W_f + Mc^2\right)^2 - c^2 p_f^2 &= \left(Mc^2 + 2\, m_e c^2\right)^2 \\
2W_f\, Mc^2 + M^2c^4 &= M^2c^4 + 4Mm_ec^4 + 4\, m_e^2 c^4 \\
W_f &= 2\, m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{M}\right)
\end{aligned}$$

Če je delec, v katerega trči foton, elektron, je $W_f = 4m_ec^2$ in gre le polovica energije fotona v tvorbo para. Če pa trči na primer v proton, je potrebna energija le zelo malo večja od $2\, m_e c^2$. To razumemo: težak delec lahko prevzame gibalno količino, ne da bi dobil znatno kinetično energijo.

Opomba: Foton se sam, brez prisotnosti drugega delca, ne more spremeniti v par elektron - pozitron, ker tedaj ni mogoče hkrati ohraniti energijo in gibalno količino.

Primer: ustavljanje kozmičnih protonov na kozmičnem sevanju ozadja.

Poglejmo še en zanimiv primer. Vemo, da imamo v vesolju sevanje v mikrovalovnem podorčju, ki je ostanek Velikega poka. To sevanje ima spekter sevanja črnega telesa s temperaturo 2,7 K, kar ustreza povprečni energiji fotona 2.10^{-4}eV. Iz vesolja prihajajo tudi delci, predvsem protoni, ki imajo nekateri izjemno veliko energijo, do 10^{20} eV in več. Ti protoni lahko pri trku z mikrovalovnimi fotoni tvorijo pare drugih delcev. Kolikšna mora biti energija protona W_p, da se bo lahko tvoril par elektron - pozitron?

Postavimo se v sistem, v katerem proton miruje. V tem sistemu je energija fotona, ki potuje proti protonu, zaradi Dopplerjevega pojava premaknjena k višjim energijam. Energija fotona je sorazmerna z njegovo frekvenco: $W_f = h\nu$, zato je v sistemu protona

$$W_f' = \gamma_p W_f \ (1 + \beta_p) = 2\gamma_p W_f$$

kjer je $\gamma_p = W_p/m_p c^2$ in smo upoštevali, da se zaradi izredno velike energije proton giblje s hitrostjo zelo blizu svetlobne. Da se bo pri trku s protonom lahko tvoril par elektron - pozitron, mora biti $W_f' \geq 2m_e c^2$, tako da je

$$\gamma_p \geq \frac{2m_e c^2}{W_f}$$

in

$$W_p = m_p \gamma_p c^2 \geq \frac{2m_e m_p c^4}{W_f} = 10^{19} \text{ eV}$$

Od te energije naprej tvorba parov učinkovito zaustavlja visokoenergijske protone in eno pomembnih vprašanj astrofizike je, od kod prihajajo.

1.8.5 Razpadi delcev

Podobno lahko obravnavamo razpade nestabilnih delcev. Pri tem se vedno del mase začetnega delca spremeni v kinetično energijo končnih delcev. Poglejmo na primer razpad negativnega piona π^- v mion μ^- in antinevtrino $\overline{\nu}_\mu$. Pion naj miruje. Mirovna energija piona je $m_\pi c^2 = 139,6$ MeV, mirovna energija miona $m_\mu c^2 = 105,7$ MeV, antinevtrino pa je skoraj brez mase. Kolišni sta energiji miona in antinevtrina?

Ker pion razpade v mirovanju, velja

$$\begin{aligned} m_\pi c^2 &= W_\mu + W_\nu \\ 0 &= p_\mu + p_\nu \end{aligned}$$

Ker je $p_\nu = W_\nu / c$, dobimo iz druge enačbe

$$W_\nu^2 = W_\mu^2 - m_\mu^2 c^4$$

V prvi enačbi prestavimo W_μ na levo in kvadriramo

$$m_\pi^2 c^4 + W_\mu^2 - 2W_\mu m_\pi c^2 = W_\mu^2 - m_\mu^2 c^4$$

od koder dobimo kinetično energijo miona

$$W_\mu - m_\mu c^2 = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2}{2m_\pi c^2} = 4,1 \text{ MeV}$$

in energijo antinevtrina

$$W_\nu = 29,8 \text{ MeV}$$

Obravnavajmo še primer razpada v letu. Nevtralni pion π^0 z mirovno energijo $m_\pi c^2 = 135$ MeV razpade na dva fotona. Polna energija piona naj bo $W_\pi = 6$ GeV. Pod kakšnimi koti glede na tir piona lahko odletita fotona?

Postavimo se spet v težiščni sistem, to je sistem, v katerem pion miruje. V njem odletita fotona v nasprotnih smereh pod poljubnim kotom ϕ^* glede na smer piona, vsak pa odnese po zakonu o ohranitvi energije ravno pol mirovne energije piona. Tako sta komponenti gibalne količine fotonov v težiščnem sistemu

$$\begin{aligned} p^*_{1x} &= -p^*_{2x} = \frac{1}{2} m_\pi c \cos\phi^* \\ p^*_{1y} &= -p^*_{2y} = \frac{1}{2} m_\pi c \sin\phi^* \end{aligned}$$

Transformirajmo nazaj v laboratorijski sistem. Faktor γ je določen s polno energijo piona: $\gamma = W_\pi / m_\pi c^2$.

$$\begin{aligned} p_{1x} &= \gamma \left(p^*_{1x} + \beta \frac{m_\pi c}{2} \right) = \\ &= \frac{m_\pi c}{2} \left(\gamma \cos\phi^* + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) \\ p_{2x} &= \frac{m_\pi c}{2} \left(-\gamma \cos\phi^* + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) \\ p_{1y} &= -p_{2y} = \frac{1}{2} m_\pi c \sin\phi^* \end{aligned}$$

Tako je za oba kota v laboratorijskem sistemu

$$\begin{aligned} \tan\phi_1 &= \frac{\sin\phi^*}{\left(\gamma \cos\phi^* + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right)} \\ \tan\phi_2 &= \frac{-\sin\phi^*}{\left(-\gamma \cos\phi^* + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right)} \end{aligned}$$

Kot med fotonoma dobimo iz

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\tan\phi_1 - \tan\phi_2}{1 + \tan\phi_1 \tan\phi_2}$$

Če je $\gamma >> 1$, dobimo preprost izraz

$$\tan\phi = \frac{1}{\gamma \sin\phi^*}$$

Če fotona v težiščnem sistemu ne odletita skoraj natanko v smeri naprej in nazaj glede na smer piona, je kot med njima v laboratoijskem sistemu majhen, fotona torej z veliko verjetnostjo odletita v smeri naprej. V našem primeru je $\gamma = 6000/135 = 45,5$ in je pri $\phi^* = 0.1$ kot med fotonoma še vedno le $\phi = 0,22$.

1.9 *Transformacija električnega in magnetnega polja

Pravila za transformacijo električnega in magnetnega polja pri prehodu iz enege inercialnega sistema v drugega dobimo z preko transformacije sile Minkovskega. To smo za primer elektromagnetne sile zapisali

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\mu &= \left(\gamma\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c}, \gamma\mathbf{F}\right) \\ \mathbf{F} &= e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \end{aligned}$$

Sila Minkovskega se transformira z Lorentzovo transformacijo, zato je transformacija iz S' v S

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1 &= \gamma F_x = \gamma_0\gamma'\left(F'_x + \beta_0\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}'}{c}\right) \\ \mathcal{F}^2 &= \gamma F_y = \gamma' F'_y \\ \mathcal{F}^3 &= \gamma F_z = \gamma' F'_z \end{aligned}$$

Naj se delec v sistemu S giblje v smeri x s hitrostjo v_0, v sistemu S' pa naj delec miruje. Tedaj je $\gamma = \gamma_0$ in $\gamma' = 1$. V S' na delec deluje le električna sila. Transformacija iz S' v S da

$$\begin{aligned} \gamma_0 E_x &= \gamma_0 \left(E'_x + 0\right) \\ E_x &= E'_x \end{aligned}$$

Komponenta x električnega polja se torej ne spremeni. Za komponento y moramo upoštevati, da v S deluje tudi magnetni del sile, ki je po pravilih za izracun vektorskega produkta $-v_0 B_z$. Dobimo

$$\gamma_0 \left(E_y - v_0 B_z\right) = E'_y \tag{1.35}$$

in na enak način še

$$E'_z = \gamma_0 \left(E_z + v_0 B_y\right)$$

Obratne transformacije so

$$\begin{aligned} E_y &= \gamma_0 \left(E'_y + v_0 B'_z\right) \\ E_z &= \gamma_0 \left(E'_z - v_0 B'_y\right) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Vstavimo enačbo 1.35 v enačbo 1.36, pa lahko izračunamo še B'_z:

$$\begin{aligned} E_y &= \gamma_0^2 E_y - v_0 \gamma_0^2 B_z + v_0 \gamma_0 B'_z \\ B'_z &= \gamma_0 B_z - E_y \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0^2 v_0} = \gamma_0 \left(B_z - \frac{v_0}{c^2} E_y\right) \end{aligned}$$

Na enak način dobimo še

$$B'_y = \gamma_0 \left(B_y + \frac{v_0}{c^2} E_z\right)$$

Manjka nam samo še transformacija B'_x. Vzemimo, da imamo v S le magnetno polje v smeri osi x. Po gornjih izrazih je v S' od nič različno lahko le polje B'_x. Naj ima delec v S hitrost $\mathbf{v} = (v_0, 0, v)$. V S' je hitrost $\mathbf{v}' = (0, 0, v')$. Sila ima le komponento y in po Lorentzovi trasnformaciji velja

$$\gamma' v' B'_x = \gamma \, v \, B_x$$

γv je tretja komponenta četverca hitrosti, ki se pri Lorentzovi transformaciji ne spremeni: $\gamma' v' = \gamma \, v$, zato je tudi

$$B'_x = B_x$$

Tako smo dobili transformacijska pravila za vse komponente polj

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\
E'_y &= \gamma_0 \left(E_y - v_0 B_z\right) & B'_y &= \gamma_0 \left(B_y + \frac{v_0}{c^2} E_z\right) \\
E'_z &= \gamma_0 \left(E_z + v_0 B_y\right) & B'_z &= \gamma_0 \left(B_z - \frac{v_0}{c^2} E_y\right)
\end{aligned}
$$

Električno in magnetno polje se ne transformirjao kot komponente vektorja četverca. Obe polji skupaj tvorita tenzor - matriko

$$
\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\
-\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -By \\
-\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & Bx \\
-\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_{zx} & 0
\end{bmatrix}
$$

ki se z matriko Lorentzove transformacije transformira takole:

$$
\mathbf{F}^{\mu\nu\prime} = \mathbf{L}^{\mu\rho}\mathbf{L}^{\nu\sigma}\mathbf{F}^{\rho\sigma}
$$